Essential Skills Mathematics

*Modulewijzer*

# Module S3

# *Kansverdeling*

# Leerdoelen en onderwerpen

## Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben moet de student:

- Bekend zijn met de Normale verdeling en enkele berekeningen kunnen uitvoeren
- Bekend zijn met de Poissonverdeling en enkele berekeningen kunnen uitvoeren

## Onderwerpen

S3.1. De Normale verdeling

S3.1.1. Kans bij bepaalde afstand $\sigma$ ten opzichte van $\mu$

S3.1.2. Standaardnormale verdeling

S3.1.3. Omrekenen naar standaardnormale verdeling

S3.2. De Poissonverdeling

## Boek

Je kan gebruikmaken van het volgende boek als aanvullend materiaal:

Statistiek om mee te werken / Arie Buijs / 10e druk. ISBN: 978-90-01-87717-0

In de tabel hieronder is aangegeven welke paragrafen in het boek overeenkomen met de verschillende paragrafen van deze studiewijzer.

| **Paragraaf studiewijzer** | **Hoofdstuk / pagina boek** |
|---|---|
| S3.1. De Normale verdeling | H5 / p.165 |
| S3.2. De Poissonverdeling | H7 / p.225 |

# S3. Introductie

Bij module S1 heb je kennisgemaakt met verschillende maatstaven: het gemiddelde, de mediaan, de kwartielafstand en de daarbij behorende boxplot. Ook heb je kennis gemaakt met de standaardafwijking. Bij module S2 heb je kennisgemaakt met “kansen”. Hierbij spreken we over het aantal gunstige gevallen ten opzichte van het totaal aantal gevallen. Bij deze module komen twee kansverdelingen aan bod. De Normale verdeling en de Poissonverdeling. Beide komen veel in de praktijk voor en daarom is het belangrijk om hiermee berekeningen uit te kunnen voeren.

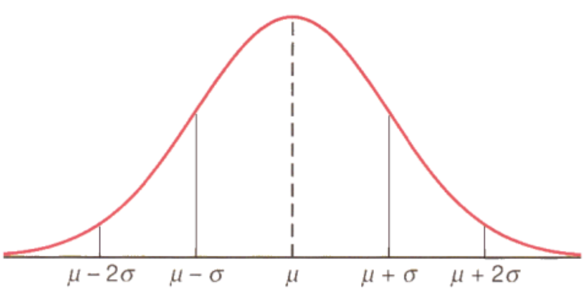
## S3.1. De normale verdeling

Een belangrijke kansverdeling in de statistiek is de normale verdeling. Verschillende wiskundigen hebben bijgedragen aan het ontwikkelen van deze verdeling, waaronder vooral de 18$^{de}$ eeuwse wiskundige Gauss die gerekend wordt tot een van de beste drie wiskundigen aller tijden. Vandaar dat men ook wel spreekt van de verdeling van Gauss en van de Gauss kromme.

Twee belangrijke redenen waarom de normale verdeling in de statistiek zo’n prominente plaats inneemt zijn de volgende:

- De eigenschappen van de normale verdeling maken vele praktische toepassingen mogelijk, met name bij het trekken van conclusies uit steekproeven.
- De normale verdeling sluit vaak nauw aan bij feitelijk waargenomen frequentieverdelingen van veel verschijnselen. Bijvoorbeeld de lengte en het gewicht van mensen, het IQ, de levensduur van gloeilampen, de levensduur van sommige typen chips, enz, enz.

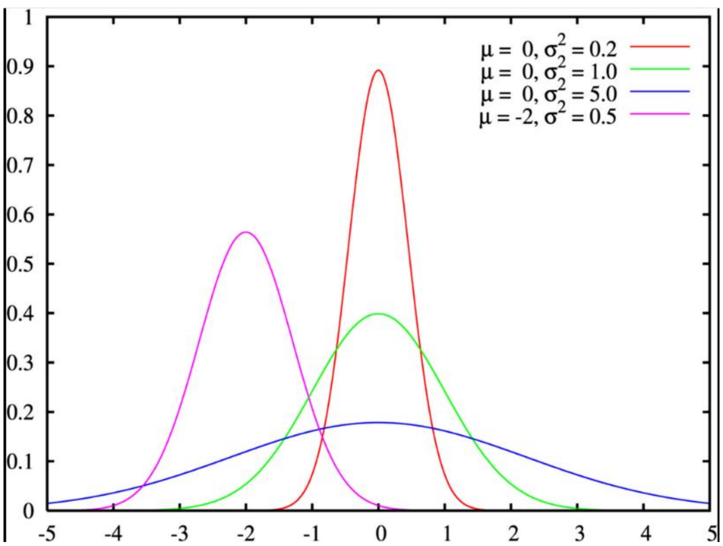
Als de waarnemingen van bijvoorbeeld de lengte van alle eerstejaarsstudenten van HBO-ICT worden uitgezet in een grafiek, kan een situatie ontstaan die weergegeven is in figuur 1. De gebogen curve geeft een normale verdeling aan die past bij de waargenomen frequentieverdeling.




*Figuur 1: Vorm van een normale verdeling (Bron: https://www.wiskundeleraar.nl/bestanden/q10669img1.gif)*

Uit figuur 1 is af te leiden dat de verwachtingswaarde μ (μ spreek je uit als mu), aangeeft waar het midden van de normale verdeling ligt. De verwachtingswaarde μ, betreft het gemiddelde. Daarnaast is ook de standaarddeviatie σ (σ spreek je uit als sigma) weergegeven.

In het geval van een hoge σ is er sprake van een brede curve. In het geval van een lage σ is er sprake van een spitse curve. Het is dus goed om te beseffen dat er niet één normale verdeling is. Er zijn juist veel verschillende normale verdelingen omdat de waarden van μ en σ niet vaststaan. In figuur 2, is het gevolg van verschillende waarden voor μ en σ visueel weergegeven. Hierbij geldt dat de oppervlakken onder de grafieken de dichtheidsfunctie van de kansen aangeeft.




*Figuur 2: Kansdichtheid van de normale verdeling*

*(Bron: https://upload.wikimedia.org/ wikipedia/commons/thumb/1/1b/ Normal_distribution_pdf.png/1280px-Normal_distribution_pdf.png)*

# S3.1.1. Kans bij bepaalde afstand σ ten opzichte van μ

De dichtheidsfunctie f(x) van de normale verdeling wordt weergegeven door de volgende formule:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Hierbij geldt:

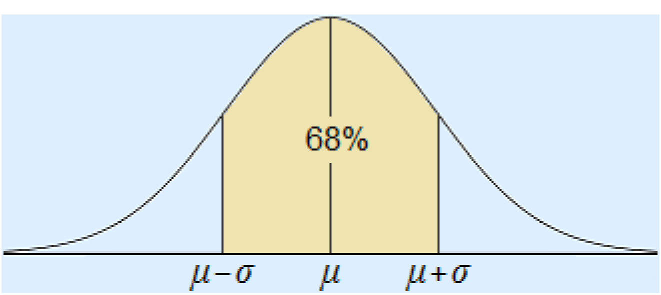
- $-\infty < x < +\infty$
- $-\mu < x < +\mu$
- $\sigma > 0$

Met bovenstaande formule kan voor alle combinaties van μ en σ de kansen worden berekend gegeven een bepaalde vraagstelling. Denk bijvoorbeeld aan de volgende vraagstellingen:

- Een partij chips van 15000 stuks wordt ingebouwd in computers. Bereken de kans dat een chip kapot gaat in de eerste 5,5 jaar van zijn actieve leven. Uitgaande van een gemiddelde $\mu = 8$ jaar en een standaardafwijking $\sigma = 2$ jaar.
- De levensduur van een bepaald type harde schrijf blijkt normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 5100 uur en een standaardafwijking van 200 uur. Wat is de kans dat een harde schijf van dit type langer meegaat dan 5000 uur?

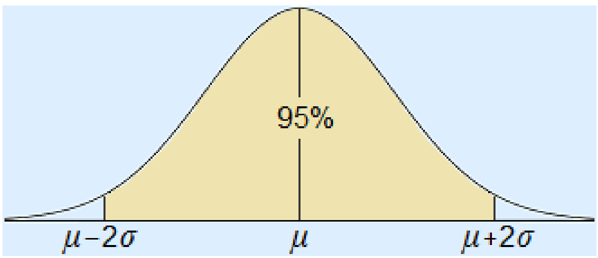
Doordat de formule van de kansdichtheid dusdanig ingewikkeld is, is het niet eenvoudig om deze kansen te berekenen. Zonder gebruik te maken van deze formule, kan er toch een behoorlijke inschatting gemaakt worden van de kans dat iets zich voortdoet.

Zoals in figuur 3 is te zien mogen we aannemen dat bij een normele verdeling ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen minder dan σ van μ afliggen.



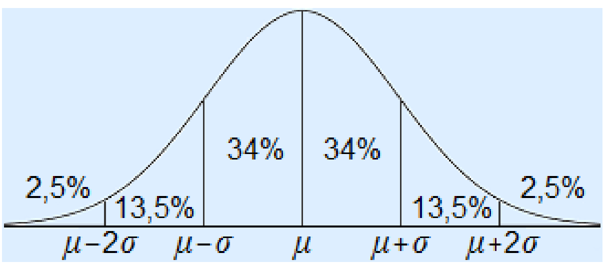

*Figuur 3: Kans bij een afstand van* σ ten opzichte van μ.*(Bron: https://www.dr-aart.nl/Statistiek_bestanden/Normaleverdeling68.png)*

Verder mogen we aannemen dat, zoals in figuur 4 is te zien bij een normele verdeling ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen minder dan 2σ van μ afliggen. Je houdt dan nog 5% van de waarnemingsgetallen over. Deze 5% ligt dus verder dan 2σ van μ af. Oftewel: 2,5% aan weerszijden van μ.




*Figuur 4: Kans bij een afstand van 2σ* ten opzichte van μ. *(Bron: https://www.dr-aart.nl/Statistiek_bestanden/Normaleverdeling95.png)*

In figuur 5 is een totaal overzicht gegeven van de verschillende kanspercentages, afhankelijk van de waarden van σ en μ.




*Figuur 5: Kansverdelingen in één afbeelding (Bron:https://www.draart.nl/Statistiek_bestanden/Normaleverdelingpercentages.png)*

**Voorbeeld 1**
In tijden van de coronacrisis hebben veel docenten en studenten telefonisch contact met elkaar. Hierbij is er sprake van een gemiddelde van 7 minuten en een standaardafwijking van 1 minuten.

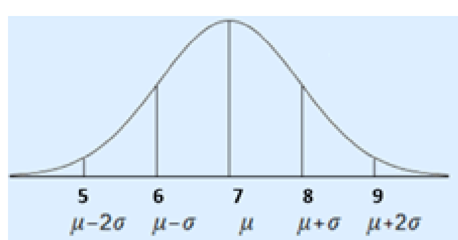
**a.** Wat is de kans dat een gesprek tussen de 6 en 9 minuten duurt?
**b.** Wat is de kans dat een gesprek meer dan 8 minuten duurt?
**c.** Wat is de kans dat een gesprek minder dan 7 minuten duurt?

In figuur 6 is de normaalverdeling bij deze opgave geschetst. Hieruit valt af te leiden:

a. 34% + 34% + 13,5% = 81,5%.

b. 13,5% + 2,5% = 16%.

c. 34% + 13,5% + 2,5% = 50%.




*Figuur 6: Kansverdeling voorbeeld 1*

**Voorbeeld 2**

Het aantal uren dat Nederlanders gamen is normaal verdeeld met een gemiddelde ($\mu$) van 216 uur per jaar en een standaardafwijking ($\sigma$) van 54 uur. Bepaal hoeveel uren de 2,5% Nederlanders met de minste game-uren gamen.

Het gaat om het percentage Nederlanders dat minder uren games speelt dan het gemiddelde. Dus we zitten aan de linkerkant van de normale verdeling. Uit de percentages van figuur 5 valt af te leiden dat 2,5% een afwijking van $2\sigma$ vanaf het $\mu$ betreft. Dus: $\mu - 2\sigma = ?$ We kunnen deze formule nu verder invullen aangezien $\sigma$ en $\mu$ bekend zijn:
Dus: $216 - 2 \cdot 54 = 108$ uur per jaar.

**Voorbeeld 3**

Van een normaalverdeelde variabele x is gegeven dat de standaardafwijking gelijk is aan 4. Verder is aangegeven dat $P(x > 25) = 2.5\%$. Wat is de waarde van $\mu$ van deze variabele?

Doordat we de kansverdelingen weten zoals weergegeven in figuur 5, kunnen we de waarde van $\mu$ als volgt bepalen:

Stap 1) Doordat er gevraagd wordt om een kans die "groter is dan", weten we dan we de normale verdeling vanaf de rechter kant gaan "inkleuren". Het eerste stuk dat we kunnen "inkleuren" vanaf de rechterkant van de normale verdeling is 2.5% (zie figuur 5). Dit is ook het percentage dat is gevraagd. We hebben dan te maken met een afwijking van $+2\sigma$ t.o.v. van $\mu$.

Stap 2) Er is gegeven dat bij een kans van 2.5% een waarde van groter dan 25 hoort. Dus: $\mu + 2\sigma = 25$.

Stap 3) De waarde van $\sigma$ is gegeven en kunnen we dus invullen in de vergelijking: $\mu + 2\sigma = 25$. Dit wordt dan: $\mu + 2 \cdot 4 = 25$. Dit geeft: $\mu + 8 = 25$. We kunnen nu de vergelijking oplossen. Hieruit volgt dat $\mu$ gelijk is aan 17.

## *Opgave* S3.1.1.1.

Van HBO-ICT studenten is bekend dat het lichaamsgewicht normaal verdeeld is, met een gemiddelde van 75 kilo en een standaarddeviatie van 5 kilo.

a) Hoeveel procent van de studenten heeft een gewicht van meer dan 85 kilo?
b) Hoeveel procent van de studenten heeft een gewicht tussen de 75 en 80 kilo?
c) Hoeveel procent van de studenten heeft een gewicht onder de 70 kilo?

## *Opgave* S3.1.1.2.

Het aantal jaarlijkse reiskilometers die studenten van de opleiding HBO-ICT afleggen van hun huis naar school is normaal verdeeld met $\mu = 8000$ kilometer en $\sigma = 2500$ kilometer. Bepaal hoeveel kilometer de 2,5% studenten met de grootste aantal woon-schoolkilometers maken.

## *Opgave* S3.1.1.3.

Van een normaalverdeelde variabele x is gegeven dat de standaardafwijking gelijk is aan 9. Verder is aangegeven dat $P(x < 3) = 16\%$. Wat is de waarde van $\mu$ van deze variabele?

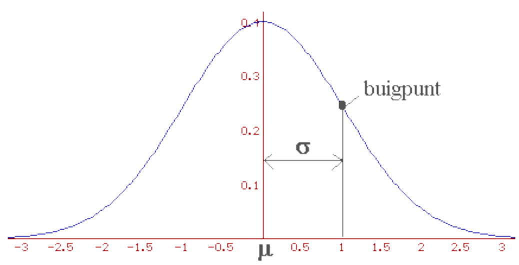
Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

# S3.1.2. Standaardnormale verdeling

In de vorige paragraaf is er een inschatting gemaakt van de kans dat iets zich voordoet. Dit werd gedaan door gebruik te maken van gegeven kanspercentages gekoppeld aan een afstand van $1\sigma$ of $2\sigma$ vanaf het gemiddelde $\mu$.

Als een variabele (de variabele noemen we x) anders afwijkt dan $1\sigma$ of $2\sigma$ vanaf het gemiddelde $\mu$, is de exacte kans niet zo gemakkelijk af te leiden. Doordat de formule van de kansdichtheid dusdanig ingewikkeld is, is het ook niet eenvoudig om deze kansen te berekenen. Daarom is er een tabel opgesteld waaruit kansen afgelezen kunnen worden. In bijlage 1 is de tabel te vinden van de **standaardnormale** verdeling.

Er is sprake van een **standaardnormale** verdeling als het gemiddelde gelijk is aan 0 ($\mu = 0$) en de standaardafwijking gelijk is aan 1 ($\sigma = 1$). In figuur 7 is de **standaardnormale** verdeling weergegeven. We spreken van een z variabele en niet van een x variabele als er sprake is van een **standaardnormale** verdeling. In de tabel kan je voor een willekeurige z variabele (de horizontale as in onderstaande figuur) de bijbehorende kans vinden.



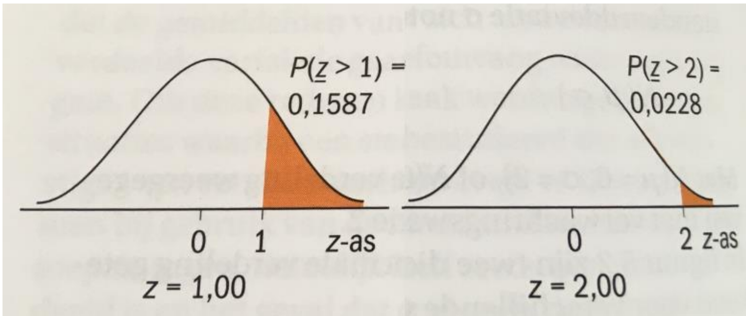

*Figuur 7: Standaardnormale verdeling (Bron: [http://www.ictklas.nl/wiswijzer/](http://www.ictklas.nl/wiswijzer/) bestanden/extra_normaal.gif)*

De tabellen (bijlage 1) geven inzicht in de overschrijdingskans ($P(x>z)$) en de cumulatieve kans ($P(x<z)$) voor punten op het positieve deel van de z-as.

**Voorbeeld 1**
Bij een evaluatie over de inhoud van een cursus kunnen zowel positieve als negatieve punten gegeven worden door de cursisten (0 = neutraal, boven de 0 is postief en onder de 0 is negatief). De uitslag van deze enquete is **standaardnormaal** verdeeld, met een gemiddelde score van 0 en een standaardafwijking van 1.

Uit de tabel (bijlage 1) kan je afleiden dat bij een z-waarde van 1 een kans hoort van 0,1587. In de linkerafbeelding van figuur 8 is dit visueel weergegeven. De kans van 0,1587 is de kans om een waarneming te doen die groter is dan 1. Dus in dit geval is de kans 15,87% dat een cursist een hogere score geeft dan 1.

De kans dat een cursist een hogere score geeft dan 2 is 2,28%. Ook dit is af te leiden uit de tabel van de overschrijdingskans (bijlage 1). Dit is weergegeven in de rechterafbeelding.




*Figuur 8: Rechteroverschrijdingskansen*

*(Bron: Arie Buijs, Statistiek om mee te werken, 10e druk, pag. 170)*

In onderstaande tabel zie je een vergelijking van de percentages in figuur 5 ten opzichte van de percentages die we kunnen afleiden uit de tabel in bijlage 1.

| **Afwijking van <>σ t.o.v. μ:** | **Figuur 5** | **Tabel bijlage 1** |
|---|---|---|
| 1σ | 2.5 + 13.5 = 16% | 15.87% |
| 2σ | 2.5% | 2.28% |

Vandaar dat in de vorige paragraaf ook werd aangegeven dat de percentages van figuur 5 “ongeveer” de gegeven percentages zijn.

**Voorbeeld 2**

Een variabele z is standaardnormaal verdeeld. Bepaal P(z > 1,52).
Doordat we te maken hebben met een standaardnormale verdeling kunnen we de z-waarde direct afleiden uit de tabel in bijlage 1. De bijbehorende kans is 6,34%.

**Voorbeeld 3**

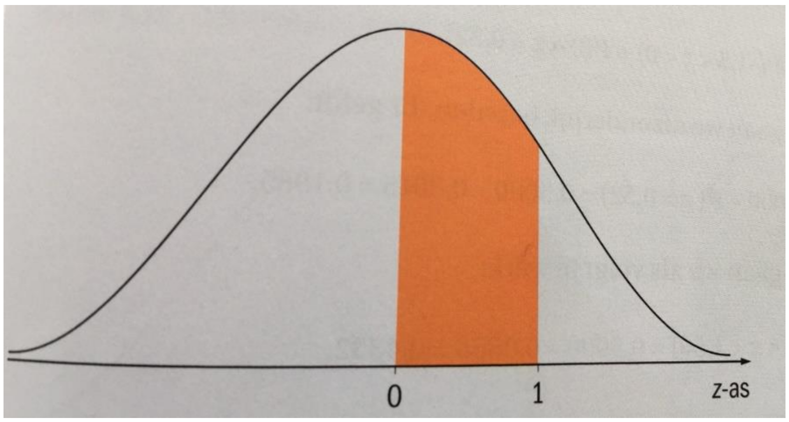
Hoe groot is P(0 < z < 1), indien we te maken hebben met een standaardnormale verdeling?

Figuur 9 geeft een visuele weergave van de oppervlakte die de kans weergeeft die we willen bepalen. Deze kans is te berekenen in een paar stappen.

Stap 1) P(z > 0) = 50%. Daar hebben we geen tabel voor nodig, aangezien 0 het gemiddelde betreft en dus op de helft van de normale verdeling ligt, is deze kans 50%.

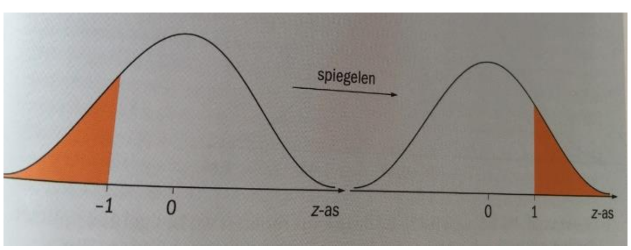
Stap 2) Echter naast dat de z groter is dan 0, is z ook kleiner dan 1. Daarom bepalen we nu de kans dat P(z > 1). Uit de tabel blijkt de bijhorende kans bij een z-waarde van 1, 0.1587 te zijn. Deze kans is dus 15,87%.

Stap 3) We bepalen nu kan (P0 < z < 1) door de kans dat z groter is 0 te verminderen met de kans dat z groter is dan 1. Dus: 50% - 15,87% = 34,15%




*Figuur 9: Visuele weergave van* P(0 < z < 1)
*(Bron: Arie Buijs, Statistiek om mee te werken, 10e druk, pag. 171)*

Bij een negatieve z-waarde blijkt dat de kans niet direct uit de tabel kan worden afgeleid. Dit komt doordat de tabel alleen is opgesteld voor z-waarden vanaf 0. Door de z-waarde te spiegelen, kan de gevraagde kans toch worden opgezocht. In figuur 10 is dit visueel weergegeven voor een z-waarde van -1.

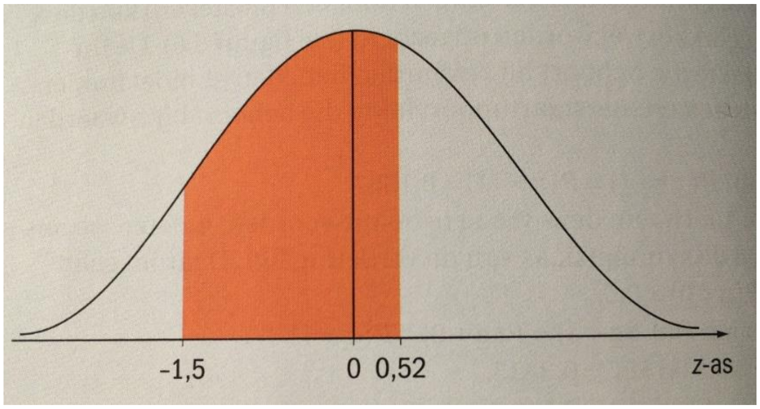



*Figuur 10: Spiegelen van de z-waarde (Bron: Arie Buijs, Statistiek om mee te werken, 10e druk, pag. 171)*

**Voorbeeld 4**
Bepaal P(-1,5 < z < 0.52), indien we te maken hebben met een standaardnormale verdeling.

Uit figuur 11 is af te leiden dat de kans gesplitst is in een gebied met positieve- en negatieve z-waarden. Deze twee verschillende oppervlakten en daarmee de bijbehorende kansen, gaan we afzonderlijk berekenen.

Dus: P(-1,5 < z < 0.52) = P(-1,5 < z < 0) + P(0 < z < 0.52)




*Figuur 11: Visuele weergave van* P(-1,5 < z < 0.52),
*(Bron: Arie Buijs, Statistiek om mee te werken, 10e druk, pag. 172)*

Stap 1) We kijken eerst naar P(-1,5 < z < 0). Hiervoor geldt dat we gaan spiegelen aangezien enkel positieve z-waarden in de tabel in bijlage 1 zijn te vinden.
Dus: P(-1,5 < z < 0) = P(0 < z < 1.5).

Stap 2) P(z > 0) = 50% en P(z > 1.5) = 6,68% (zie tabel bijlage 1).
Dus P(-1,5 < z < 0) = P(0 < z < 1.5) = 50% - 6,68% = 43,32%.

Stap 3) We gaan nu kijken naar: P(0 < z < 0.52)
P(z > 0) = 50% en P(z > 0.52) = 30,15% (zie tabel bijlage 1).
Dus P(0 < z < 0.52) = 50% - 30,15% = 19,85%.

Stap 4) Als laatste bepalen we de totale kans waarnaar is gevraagd: P(-1,5 < z < 0.52)
P(-1,5 < z < 0.52) = 43,32% + 19,85% = 63,17%.

## *Opgave* S3.1.2.1.

Bij een evaluatie over de inhoud van een cursus kunnen zowel positieve als negatieve punten gegeven worden door de cursisten (0 = neutraal, boven de 0 is postief en onder de 0 is negatief). De uitslag van deze enquete is **standaardnormaal** verdeeld, met een gemiddelde score van 0 en een standaardafwijking van 1.

Wat is de kans dat de cursus wordt beoordeeld met een positieve waarde tussen de 0 en de 2.5?

## *Opgave* S3.1.2.2.

Een variabele z is **standaardnormaal** verdeeld. Bepaal $P(z < -1.31)$.

## *Opgave* S3.1.2.3.

Bepaal $P(-0{,}6 < z < 0.78)$, indien we te maken hebben met een **standaardnormale** verdeling.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

# S3.1.3. Omrekenen naar standaardnormale verdeling

Als we in plaats van met een **standaardnormale** verdeling te maken hebben met een normale verdeling is de kans niet direct uit de tabellen van bijlage 1 af te leiden. We kunnen ook geen gebruik maken van figuur 5, als een variabele (de variabele noemen we x) anders afwijkt dan $1\sigma$ of $2\sigma$ vanaf het gemiddelde $\mu$. Wél kunnen we gebruikmaken van de tabellen van bijlage 1. Om hiervan gebruik te kunnen maken is het nodig om variabele x om te rekenen naar een **standaardnormale** waarde z. Dit wordt verder toegelicht aan de hand van een voorbeeld.

**Voorbeeld 1**
De gemiddelde hoogte van dennebomen in een kwekerij is 3.14 meter. De hoogte is normaal verdeeld met een standaard afwijking van 0.99 meter. Bepaal de kans dat een denneboom groter is dan 3.2 meter.

Uit deze opgave blijkt:
- $\mu = 3.14$
- $\sigma = 0.99$
- $x = 3.2$

We willen bepalen $P(x > 3.2)$.

Duidelijk is dat we niet te maken hebben met een standaardnormale verdeling en dat we de percentages ook niet kunnen benaderen met behulp van de percentages gegeven in figuur 5. Hieronder wordt toegelicht wat mogelijk is, door gebruik te maken van de manipulaties die je in module C2 hebt geleerd.

**Stap 1 (verschuiven):**
We verschuiven de verdeling allereerst 3.14 meter naar links, zodat het gemiddelde op 0 uitkomt. Dat betekent dat de x-waarde wordt gewijzigd naar: $3.2 – 3.14 = 0.06$.
We kunnen nu de tabel van de standaardnormale verdeling nog niet toepassen, omdat nog niet is voldaan aan de eis dat $\sigma = 1$.

**Stap 2 (vervormen):**
Als we een standaardafwijking van 1 willen krijgen is het nodig om in dit geval te delen door 0.99. Aangezien $\frac{0.99}{0.99}$, gelijk is aan 1. Deze correctie, waarbij we delen door de standaardafwijking wordt vervolgens ook toegepast op de gekregen x waarde. Dus: $\frac{0.06}{0.99}$ = 0.0606.

De uitkomst betreft de waarde z, welke we kunnen aflezen in de tabel van de standaardnormale verdeling.

Bij z = 0.06 vinden we in de tabel van bijlage 1 de kans: 0,4761. De kans dat een denneboom dus groter is dan 3.2 meter is gelijk aan 47,61%.

Samengevat kunnen we dus zeggen dat bij een normale verdeling met een willekeurige waarde van μ en σ de z-waarde berekend kan worden door:

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

**Voorbeeld 2**

De tijd die nodig is om een ledlamp te maken is normaal verdeeld met een gemiddelde van 10.1 minuten en een standaardafwijking van 3.66 minuten.
Bepaal de kans dat het maken van een ledlamp minder dan 17 minuten duurt.

Uit deze opgave blijkt:

- $\mu = 10.1$
- $\sigma = 3.66$
- $x = 17$

We willen bepalen $P(x < 17)$.

Duidelijk is dat we niet te maken hebben met een standaardnormale verdeling en dat we de percentages ook niet kunnen benaderen met behulp van de percentages gegeven in figuur 5. Hieronder wordt toegelicht wat wel mogelijk is.

We passen meteen de gevonden formule uit voorbeeld 1 toe: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

$z = \frac{17 - 10.1}{3.66} = 1.89$.

Bij een z-waarde van 1.89 hoort een kans van 2.94% (zie tabel bijlage 1). Dit is de kans dat het maken van een ledlamp meer dan 17 minuten duurt. De kans dat dit minder dan 17 minuten duurt is dan ook gelijk aan: 100% - 2.94% = 97.06%.

**Voorbeeld 3**

De reistijd van een student naar de Hogeschool van Amsterdam is niet helemaal constant vanwege het feit dat hij zowel met de bus als trein moet reizen en bij beide weleens vertraging optreedt. De reistijd x is een normaal verdeelde kansvariabele met $\mu = 55$ minuten en $\sigma = 9$ minuten.

Hoe groot is de kans dat deze student op een willekeurige dag tussen de 50 en 75 minuten reistijd nodig heeft?

Uit deze opgave blijkt:

- $\mu = 55$
- $\sigma = 9$
- $50 < x < 75$

We willen bepalen $P(50 < x < 75)$.
Deze kans kunnen we bepalen door: $P(50 < x < 75) = P(x > 50) - P(x > 75)$.

We passen weer de gevonden formule uit voorbeeld 1 toe: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

Voor $P(x > 60)$ geldt: $z = \frac{50 - 55}{9} = -0.56$.

Voor $P(x > 75)$ geldt: $z = = \frac{75 - 55}{9} = 2.22$.

We willen weten wat de kans is bij een waarde hoger dan -0.56. Aangezien dit correspondeert met de kans dat de reistijd langer is dan 50 minuten.

We spiegelen de z-waarde van -0.56 naar 0.56, om de kans uit de tabel in bijlage 2 af te kunnen lezen. Bij deze z-waarde hoort een kans van 28,77%. De waarde -0.56 hoort bij een x-waarde van 55. De gespiegelde waarde van 0.56 hoort bij een x waarde van 60. Aangezien: $\frac{60 - 55}{9} = 0.56$.

Van deze gespiegelde waarde (z = 0.56 met als bijgehorende x-waarde = 90) willen we dus juist weten wat de kans is op lagere waarde van z. Oftewel: We willen weten wat de kans is dat de reistijd korter duurt dan 60 minuten duurt. Dit betreft namelijk dezelfde kans als de vraag hoe groot de kans is dat de reisttijd langer dan 50 minuten duurt.

De kans 28.77% geeft de kans weer op een reistijd die hoger is dan 0.56. De kans dat dit juist lager is, is dus: 100% - 28.77% = 71.23%.

Bij een z-waarde van 2.22 hoort een kans van 1,32%. Dit is de kans dat de reistijd langer duurt dan 75 minuten.

De kans dat de reistijd tussen de 50 en 75 minuten ligt is: $P(x > 50) – P(x > 75)$ en is dan dus: 71.23% - 1,32% = 69.91%.

## *Opgave* S3.1.3.1.

Veronderstel dat de levensduur van een bepaald type chips normaal verdeeld is met een gemiddelde van $\mu = 8$ jaar en een standaardafwijking $\sigma = 2$ jaar. Bereken met behulp van de tabel in bijlage 1 de kans dat de chip kapot gaat in de eerste 5,5 jaar van zijn actieve leven.

## *Opgave* S3.1.3.2.

De normale verdeling wordt o.a. gebruikt in de ICT bij het testen van verschillende computerprogramma's voor het oplosssen van hetzelfde probleem.

Programma A wordt verschillende keren gebruikt voor het uitvoeren van een bepaalde test. Dat levert voor de tijd die nodig is om de test uit te voeren, een normale verdeling op met een gemiddelde van 10 minuten en een standaardafwijking van 2 minuten. Het gebruik van programma B voor het uitvoeren van dezelfde test levert ook een normale verdeling op met een gemiddelde van 9 minuten en een standaardafwijking van 3 minuten.

We willen dat de test in 11 minuten klaar is.

a. Wat is de kans voor beide programma's dat de test in 11 minuten klaar is?
b. Welk programma kan het beste gekozen worden?

## *Opgave* S3.1.3.3.

In tijden van de coronacrisis hebben veel docenten en studenten telefonisch contact met elkaar. Hierbij is er sprake van een gemiddelde van 7.4 minuten en een standaardafwijking van 1.2 minuten.

**a.** Wat is de kans dat een gesprek tussen de 6 en 9 minuten duurt?
**b.** Wat is de kans dat een gesprek meer dan 7 minuten duurt?
**c.** Wat is de kans dat een gesprek meer dan 8 minuten duurt?

<ins>Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.</ins>

# S3.2. De Poissonverdeling

In de praktijk heeft men vaak te maken met gebeurtenissen die plotseling in een fractie van een seconde optreden zoals storingen in ICT-systemen, storingen in het elektriciteitsnet in Nederland, storingen in productieprocessen, verkeersongevallen, vliegtuigongelukken, blikseminslagen, aardbevingen, enz. enz.

In tegenstelling tot de normale verdeling waar men te maken heeft met continu variërende variabelen zoals bijvoorbeeld levensduur, lengte, gewicht, heeft de Poissonverdeling betrekking op *discrete* variabelen: variabelen die de waarde 0,1,2,3,..enz. kunnen aannemen. Zo is het aantal computerstoringen in een callcentrum een voorbeeld van een discrete variabele. Dat kan 1 storing zijn of 2 of 3, maar nooit 2,5.

De Poissonverdeling is vernoemd naar de Fransman Simeon Poisson, die in 1837 voor het eerst over deze verdeling publiceerde.

Bij de Poissonverdeling tellen we het aantal registraties gedurende een periode van een waarneming. De kansvariabele, kan zoals hierboven ook al aangegeven dus alleen niet-negatieve waarden aannemen. Voor de kans op een aantal registraties x geldt dan de volgende formule:

- $P(x) = \dfrac{(\lambda t)^{x} \cdot e^{-\lambda t}}{x!}$

Hierbij geldt:

- t betreft de lengte van het tijdsinterval
- λ (λ spreek je uit als labda) betreft het gemiddelde of de verwachte aantal successen per tijdseeheid
- x betreft het aantal registraties

  ! is de faculteit. De faculteit van het getal k, genoteerd als k!, is het product van de getallen 1 tot en met k. Dus 3! = 3 · 2 · 1 = 6 (zie module S2).

  Let op: 0! is gelijk aan 1. Dat lijkt in eerste instantie gek aangezien de definitie dat k! het product is van de getallen 1 t/m k niet geldt voor k = 0. In dat geval zou namelijk gelden dat 0! gelijk is aan 0. Het feit dat 0! gelijk is aan 1 komt voort uit de volgende vergelijking:

  (k+1)! = (k+1) · k!.

  Stel k = 3, dan geldt: (3+1)! = (3+1) · 3!. Oftewel: 4! = 4 · 3!

  Stel k = 0, dan geldt: (0+1)! = (0+1) · 0!. Oftewel: 1! = 1 · 0!. Deze stelling klopt alleen als 0! Gelijk is aan 1.

$\lambda t$ in bovenstaande formule kan ook geschreven worden als $\mu$.
Stel dat het gemiddelde aantal klanten bij een bank volgens een Poissonverdeling gemiddeld 5 klanten per kwartier is. Dan is het aantal klanten per uur volgens de Poissonverdeling verdeeld met $\mu = \lambda t$. Oftewel $5 \cdot 4 = 20$.
Maken we direct gebruik van $\mu$ in de formule, dan geldt:

- $P(x) = \frac{(\mu)^x \cdot e^{-\mu}}{x!}$

**Voorbeeld 1**
Veronderstel dat het aantal fouten, gemaakt door een programmeur, Poisson verdeeld is met een gemiddelde van 4 fouten per dag. Beantwoord de volgende vragen met behulp van de formule van de Poissonverdeling:

a. Wat is de kans dat deze programmeur op een bepaalde dag slechts 1 fout maakt?
b. Wat is de kans dat deze programmeur 4 fouten per dag maakt ?
c. Wat is de kans dat de programmeur maximaal 4 fouten per dag maakt?

a. We hebben te maken met de volgende waarden:
   - $\mu = 4$.
   - $x = 1$.

   Invullen in de formule geeft:
   - $P(1) = \frac{(4)^1 \cdot e^{-4}}{1!} = 0.0733$.

b. We hebben nu te maken met de volgende waarden:
   - $\mu = 4$.
   - $x = 4$.

   Invullen in de formule geeft:
   - $P(4) = \frac{(4)^4 \cdot e^{-4}}{4!} = 0.1954$.

c. De kans op maximaal 4 fouten betekent: P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4).
   P(1) en P(4) zijn al bekend.
   P(0), P(2) en P(3) worden hieronder bepaald:
   - $P(0) = \frac{(4)^0 \cdot e^{-4}}{0!} = 0.0183$.
   - $P(2) = \frac{(4)^2 \cdot e^{-4}}{2!} = 0.1465$.
   - $P(3) = \frac{(4)^3 \cdot e^{-4}}{3!} = 0.1954$.

   De totale kans is dus: P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) =
   0.0183% + 0.0733% + 0.1465% + 0.1954% + 0.1954% = 0.6289. Oftewel: 62.89%.

**Voorbeeld 2**
In Amsterdam gaan op een zitplaats in een locale bus per uur gemiddeld 12 mensen zitten. Onder de dagelijkse passagiers bevindt zich ICT-medewerkster Caro, werkzaam bij Google. Het aantal passagiers op de zitplaats is in de tijd gezien Poisson verdeeld.

Wat is de kans dat in een willekeurig kwartier er meer dan 5 mensen de zitplaats gaan bezetten?

Een eigenschap van de Poissonverdeling is dat als per uur gemiddeld 12 mensen op een willekeurige zitplek gaan zitten, dat dan per kwartier (dus een vier maal zo klein tijdsinterval ) het gemiddelde aantal mensen ook vier maal kleiner wordt, dus gemiddeld 3 mensen per kwartier.

Gevraagd wordt om meer dan 5 mensen: P(meer dan 5). Dit kan je berekenen door door P(meer dan 5) gelijk te stellen aan: 1 – (P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)).

- P(0) = $\frac{(3)^0 \cdot e^{-3}}{0!} = 0.0498$
- P(1) = $\frac{(3)^1 \cdot e^{-3}}{1!} = 0.1494$
- P(2) = $\frac{(3)^2 \cdot e^{-3}}{2!} = 0.2240$
- P(3) = $\frac{(3)^3 \cdot e^{-3}}{3!} = 0.2240$
- P(4) = $\frac{(3)^4 \cdot e^{-3}}{4!} = 0.1680$
- P(5) = $\frac{(3)^5 \cdot e^{-3}}{5!} = 0.1008$

P(meer dan 5) = 1 – (0.0498 + 0.1494 + 0.2240 + 0.2240 + 0.1680 + 0.1008) = 0.084.
De kans dat het aantal passagiers in een willeurig kwartier meer dan 5 is, is dus: 8.4%.

**Voorbeeld 3**
Dagelijks reist Lisa met de trein naar haar werk. Gemiddeld vindt in haar trein, op 1 van de 5 werkdagen een controle plaats. Deze controles zijn in de tijd gezien Poisson verdeeld. Bij het niet inchecken met je ov-kaart betaal je een boete van 50 euro. Lisa legt elke dag met de trein een bepaald traject af. Dit kost 9 euro euro per dag.

a. Wat is de kans dat Lisa in 5 werkdagen niet gecontroleerd wordt?
b. Wat is de kans dat Lisa in 5 werkdagen precies 1 keer gecontroleerd wordt?
c. Wat is de kans dat Lisa in 5 werkdagen meer dan 1 keer gecontroleerd wordt ?

d. Wat is voor Lisa het voordeligst: nooit betalen en af en toe een bekeuring op de koop nemen of altijd netjes  een kaartje kopen?

Gemiddeld vindt er 1 controle plaats in de 5 dagen. Dus μ = 1.

a. P(0) = $\frac{(1)^0 \cdot e^{-1}}{0!} = 0.3679$. Dus 36,8 %.

b. P(1) = $\frac{(1)^1 \cdot e^{-1}}{1!} = 0.3679$. Dus 36,8 %.

c. P (meer dan 1) is gelijk aan: 1 – (P(0) + P(1)) = 1 - 0.3679 - 0.3679 = 0.2642. Dus 26.42%.

d. Als Lisa 5 dagen lang netjes een kaartje koopt dan kost haar dat 9 * 5 = 45 euro. Als zij zwart rijdt zal zij gemiddeld 1 keer per 5 dagen een boete krijgen. Dit kost Lisa 50 euro. Het is dus goedkoper om een kaartje te kopen.

## *Opgave* S3.2.1.

Pascal Inc koopt ongeteste computerchips in. De firma is echter op zoek naar een andere leverancier die geteste en gegarandeerde chips tegen een hogere prijs kan leveren. Om te bepalen of het veranderen van leverancier per saldo financieel voordeliger is, moet Pascal Inc het percentage onbruikbare chips van de huidige leverancier bepalen. Stel dat dit percentage 2% is.

Wordt nu een representatieve steekproef van 200 stuks genomen, dan is het meest waarschijnlijke aantal kapotte chips 2% van 200, oftewel 4 kapotte chips.
De omstandigheden (o.a. kleine kansen) rechtvaardigen het gebruik van de Poisson verdeling om kansen op andere aantallen kapotte chips te berekenen. Maak gebruik van de Poissonkansfunctie bij de volgende vraagstellingen.

a. Bereken de kans om in een steekproef van 200 chips 3 kapotte chips aan te treffen
b. Bereken de kans om in een steekproef van 200 chips meer dan 5 kapotte chips aan te treffen.

## *Opgave* S3.2.2.

Een onderzoek van KPMG over de afgelopen 20 jaar heeft opgeleverd dat 0,004% van de medewerkers bij een groot aantal ICT-bedrijven in Nederland door rsi-klachten, rugklachten en burn-out verschijnselen definitief arbeidsongeschikt werd. Bereken met behulp van de Poissonverdeling de kans dat bij de pensioenverzekeraar Zwitserleven in

2020 bij meer dan 2 van de 10000 door de werknemers afgesloten arbeidsongeschiktheidsverzekeringen tot uitkering zal moeten worden overgegaan.

## *Opgave* S3.2.3.

Het bedrijf Gooiland Computers ontvangt per uur gemiddeld 12 klanten. Hoe groot is de kans dat in een willekeurig kwartier er meer dan 4 mensen de winkel binnenkomen? Je mag veronderstellen dat het aantal binnenkomende klanten in de tijd gezien Poisson verdeeld is.

## *Opgave* S3.2.4.

Het bedrijf Computercare te Hilversum heeft drie busjes, waarmee klanten op hun woonadres bezocht kunnen worden i.v.m computerproblemen van de klant. De behoefte van de klanten aan busjes per dag blijkt Poisson verdeeld te zijn met een gemiddelde van 2 busjes. Men overweegt een extra busje aan te schaffen. In verband met kosten en baten van deze extra aanschaf wil het bedrijf Computercare het volgende weten :

a. Wat is de kans dat op een willekeurige dag geen busjes nodig zijn?
b. Wat is de kans dat op een willekeurige dag 1 busje nodig is?
c. Wat is de kans dat op een willekeurige dag meer dan 3 busjes noodzalelijk zijn?
d. Wat is de kans dat op een willekeurige dag meer dan 4 busjes noodzalelijk zijn?
e. Wat is de kans dat op een willekeurige dag meer dan 5 busjes noodzalelijk zijn?
f. Wat is de kans dat op een willekeurige dag meer dan 6 busjes noodzalelijk zijn?

## *Opgave* S3.2.5.

Als gevolg van de coronacrisis worden er in verschillende landen steeds meer mondkapjes gedragen. Nu blijkt dat bij 1% van de werknemers ongewenste bijwerkingen optreden.

a. Hoe groot is de kans dat op een klein kantoor in Europa met 60 werknemers er niemand is met een ongewenste reactie op het gebruik van deze kapjes?
b. Hoe groot is de kans dat er bij meer dan 3 werknemers uit deze groep van 60 werknemers ongewenste bijwerkingen optreden ?

## *Opgave* S3.2.6.

Het aantal branden in Silicon Valley is bij benadering Poisson verdeeld met een gemiddelde van 1 brand per 2 maanden. Gevraagd:

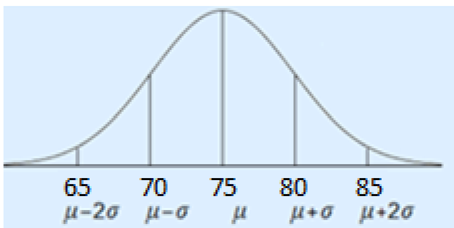
a. Bereken het gemiddelde aantal branden per maand.
b. Bereken de kans dat er in een bepaalde maand meer dan 3 branden uitbreken.
   Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

# Antwoorden van de opgaven

## *Opgave* S3.1.1.1.

In figuur <> is de normaalverdeling bij deze opgave geschetst. Wetende de percentages zoals weergegeven in figuur 5, valt hieruit af te leiden dat:

a) P(x > 85) = 2.5%.
b) P(75 < x < 80) = 34%.
c) P(x < 70) = 13.5% + 2.5% = 16%




*Figuur* <>

## *Opgave* S3.1.1.2.

Het gaat om het percentage studenten dat meer reist dan het gemiddelde. Dus we zitten aan de rechterkant van de normale verdeling. Een percentage van 2,5% betreft een afwijking van 2σ vanaf het μ (zie figuur 5). Dus: μ + 2σ = ?? kilometer. Als we μ & σ invullen wordt dat: 8000 + 2 · 2500 = 13000 kilometer. Dus méér dan 13000 kilometer.

## *Opgave* S3.1.1.3.

Stap 1) Doordat er gevraagd wordt om een kans die "kleiner is dan", weten we dan we de normale verdeling vanaf de linker kant gaan "inkleuren". Het eerste stuk dat we kunnen "inkleuren" vanaf de linkerkant van de normale verdeling is 2.5% (zie figuur 5). We hebben dan te maken met een afwijkint van -2σ t.o.v. van μ. Gevraagd wordt om 16%. We kleuren daarom ook het volgende stuk in van 13.5% (zie figuur 5). Tesamen komen we nu op 2.5% + 13.5% = 16%. Dit is het percentage dat gevraagd is. We hebben nu te maken met een afwijking van -σ t.o.v. van μ.

Stap 2) Er is gegeven dat bij een kans van 16% een waarde van kleiner dan 3 hoort. Dus: μ - σ = 3.

Stap 3) De waarde van σ is gegeven en kunnen we dus invullen in de vergelijking: μ - σ = 3. Dit wordt dan: μ - 9 = 3. We kunnen nu de vergelijking oplossen. Hieruit volgt dat μ gelijk is aan 12.

## *Opgave* S3.1.2.1.

We willen $P(0 < z < 2.5)$ bepalen.
Dit doen we in 2 stappen, aangezien: $P(0 < z < 2.5) = P(z > 0) - P(z > 2.5)$.

Uit de tabel (bijlage 1) kan je afleiden dat bij een z-waarde van 0 een kans hoort van 50% (wat logisch is aangezien dit de standaardnormale verdeling in tweeën splitst.

Uit de tabel (bijlage 1) kan je afleiden dat bij een z-waarde van 2.5 een kans hoort van 0.62%.

De kans dat een cursist een score geeft tussen de 0 en 2.5 is 50% - 0.62% = 49.38%.

## *Opgave* S3.1.2.2.

We bepalen $P(z < -1.31)$.
Doordat we te maken hebben met een negatieve z-waarde, spiegelen we eerst deze z-waarde. Bij een z-waarde van 1.31 hoort een kans van 9.51%. Dit is de kans op een hogere waarde dan 1.31.

Is dit ook de kans die we willen weten? We willen weten wat de kans is dat z kleiner is dan -1.31. De spiegeling daarvan is inderdaad wat de kans willen weten dat z groter is dan 1.31. Dus het antwoord is 9.51%.

## *Opgave* S3.1.2.3.

We bepalen $P(-0,6 < z < 0.78)$.
$P(-0,6 < z < 0.78) = P(-0,6 < z < 0) + P(0 < z < 0.78)$

Stap 1) We kijken eerst naar $P(-0,6 < z < 0)$. Hiervoor geldt dat we gaan spiegelen aangezien enkel positieve z-waarden in de tabel in bijlage 1 zijn te vinden.
Dus: $P(-0,6 < z < 0) = P(0 < z < 0.6)$.

Stap 2) $P(0 < z < 0.6) = P(z > 0) - P(z > 0.6)$.
$P(z > 0) = 50\%$ en $P(z > 0.6) = 27,43\%$ (zie tabel bijlage 1).
Dus $P(-0.6 < z < 0) = P(0 < z < 0.6) = P(z > 0) - P(z > 0.6) = 50\% - 27,43\% = 22,57\%$.

Stap 3) We gaan nu kijken naar: $P(0 < z < 0.78)$

$P(0 < z < 0.78) = P(z > 0) - P(z > 0.78)$.

$P(z > 0) = 50\%$ en $P(z > 0.78) = 21,77\%$ (zie tabel bijlage 1).
Dus $P(0 < z < 0.52) = P(z > 0) – P(z > 0.78) = 50\% - 21,77\% = 28,23\%$.

Stap 4) Als laatste bepalen we de totale kans waarnaar is gevraagd: $P(-0,6 < z < 0.78)$.
$P(-0,6 < z < 0.78) = P(-0,6 < z < 0) + P(0 < z < 0.78) = 22,57\% + 28,23\% = 50.8\%$.

## *Opgave* S3.1.3.1.

We willen bepalen: P ($x < 5.5$).
We moeten dan de z-waarde berekenen, gegeven door de onderstaande formule:

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

Als we de gegeven waarden invullen krijgen we: $\frac{5.5 - 8}{2} = -1.25$.
Nu geldt dat we gaan spiegelen aangezien enkel positieve z-waarden in de tabel in bijlage 1 zijn te vinden. Dus: Dus P ($z < -1.25$) = Dus P ($z > 1.25$).
Bij $z = 1,25$ vinden we een kans van 10.56%. Dit is de kans dat de chip in de eerste 5,5 jaar stuk gaat.

## *Opgave* S3.1.3.2.

a)
We bepalen: P(A) ($x < 11$) en P(B) ($x < 11$).
Voor P(A) ($x < 11$) geldt een z-waarde van: $\frac{11 - 10}{2} = 0.5$. De kans hierbij is: 30.85%. Dit is de kans op een langere tijd dan 11 minuten. De kans op een kortere tijd dan 11 minuten is dus 100% - 30.85% = 69.15%.
Voor P(B) ($x < 11$) geldt een z-waarde van: $\frac{11 - 9}{3} = 0.67$. De kans hierbij is: 25.14%. Dit is de kans op een langere tijd dan 11 minuten. De kans op een kortere tijd dan 11 minuten is dus 100% - 25.14% = 74.86%.

b)
Programma B kan het beste worden gekozen.

## *Opgave* S3.1.3.3.

a. We bepalen P(6 > x > 9) = P(x > 6) – P(x > 9).

De z-waarde behorend bij x = 6 is gelijk aan: $\frac{6-7.4}{1.2} =$ -1.17.

Nu geldt dat we gaan spiegelen aangezien enkel positieve z-waarden in de tabel in bijlage 1 zijn te vinden. Dus: Dus P (z > -1.17) = P (z < 1.17).

Uit de tabel in bijlage 1 blijkt bij deze z-waarde een kans van 12.10% te horen. Dit betreft: P (z > 1.17). Daarom geldt dat P (z < 1.17) = P(x > 6) = 100% - 12.10% = 87.9%.

De z-waarde behorend bij x = 9 is gelijk aan: $\frac{9-7.4}{1.2} =$ 1.33.

Uit de tabel in bijlage 1 blijkt bij deze z-waarde een kans van 9.18% te horen. Dit betreft: P (z > 1.17) = P (x > 9).

P(6 > x > 9) = P(x > 6) – P(x > 9) is dan dus: 87.9% - 9.18% = 78.72%

b. We bepalen P(x > 7)

De z-waarde behorend bij x = 7 is gelijk aan: $\frac{7-7.4}{1.2} =$ -0.33.

Nu geldt dat we gaan spiegelen aangezien enkel positieve z-waarden in de tabel in bijlage 1 zijn te vinden. Dus: Dus P (z > -0.33) = P (z < 0.33).

Uit de tabel in bijlage 1 blijkt bij deze z-waarde een kans van 37.07% te horen. Dit betreft: P (z > 0.33). Daarom geldt dat P (z < 0.33) = P(x > 7) = 100% - 37.07% = 62.93%.

c. We bepalen P(x > 8)

De z-waarde behorend bij x = 8 is gelijk aan: $\frac{8-7.4}{1.2} =$ 0.5.

Uit de tabel in bijlage 1 blijkt bij deze z-waarde een kans van 30.85% te horen. Dit betreft: P (z > 1.17) = P (x > 8).

## *Opgave* S3.2.1.

Het gemiddelde μ is 4.

a. Voor 3 kapotte chips geldt:
   $P(3) = \frac{(4)^3 \cdot e^{-4}}{3!} = 0.1954$. Oftewel 19.54%.
b. Voor meer dan 5 kapotte chips geldt:
   P(>5) = 1 – (P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+(P4)+P(5)
   $P(0) = \frac{(4)^0 \cdot e^{-4}}{0!} = 0.0183$
   $P(1) = \frac{(4)^1 \cdot e^{-4}}{1!} = 0.0733$
   $P(2) = \frac{(4)^2 \cdot e^{-4}}{2!} = 0.1465$
   $P(4) = \frac{(4)^4 \cdot e^{-4}}{4!} = 0.1954$.
   $P(5) = \frac{(4)^5 \cdot e^{-4}}{5!} = 0.1563$
   P(x>5) = 1 – (0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954 + 0.1954 + 0.1563) = 0.2148.
   Oftewel 21,28%.

## *Opgave* S3.2.2.

Het gemiddelde μ is 0.4 aangezien 0.004% · 10.000 = 0.4 medewerkers..

Voor meer dan 2 medewerkers geldt:
P(x>2) = 1 – (P(0) + P(1) + P(2)).

$P(0) = \frac{(0.4)^0 \cdot e^{-0.4}}{0!} = 0.6703$
$P(1) = \frac{(0.4)^1 \cdot e^{-0.4}}{1!} = 0.2681$
$P(2) = \frac{(0.4)^2 \cdot e^{-0.4}}{2!} = 0.0536$
P(x>2) = 1 – (0.6703+ 0.2681 + 0.0536) = 0.008 = 0.8%

## *Opgave* S3.2.3.

Het bedrijf Gooiland Computers ontvangt per uur gemiddeld 12 klanten. Hoe groot is de kans dat in een willekeurig kwartier er meer dan 4 mensen de winkel binnenkomen? Je mag veronderstellen dat het aantal binnenkomende klanten in de tijd gezien Poisson verdeeld is.

Per uur gemiddeld 12 klanten, dus per kwartier gemiddeld 3 klanten.
Voor meer dan 4 mensen in de winkel geldt.

P(x>4) = 1 – (P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)).

$P(0) = \frac{(3)^0 \cdot e^{-3}}{0!} = 0.0498$

$P(1) = \frac{(3)^1 \cdot e^{-3}}{1!} = 0.1494$

$P(2) = \frac{(3)^2 \cdot e^{-3}}{2!} = 0.2240$

$P(3) = \frac{(3)^3 \cdot e^{-3}}{3!} = 0.2240$

$P(4) = \frac{(3)^4 \cdot e^{-3}}{4!} = 0.1680$

P(x>4) = 1 – (0.0498 + 0.1494 + 0.2240 + 0.2240 + 0.1680) = 0.1848 = 18.48%.

## *Opgave* S3.2.4.

a. 13,5 %
b. 27,1%
c. 14,3%
d. 5,3%
e. 1,7%
f. 0,5%.

## *Opgave* S3.2.5.

1% van 60 is 0,6. Dus het gemiddelde = 0,6.

a. 54.9 % ,
b. 0.003 is 0,3 %.

## *Opgave* S3.2.6.

- **a.** 0.5
- **b.** 0.2 %

## Bijlage 1
## Tabel overschrijdingskans van de standaardnormale verdeling.

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| **0.0** | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |
| **0.1** | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| **0.2** | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| **0.3** | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| **0.4** | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| **0.5** | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| **0.6** | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| **0.7** | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| **0.8** | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| **0.9** | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| **1.0** | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| **1.1** | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| **1.2** | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| **1.3** | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| **1.4** | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| **1.5** | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| **1.6** | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| **1.7** | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| **1.8** | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| **1.9** | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| **2.0** | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0210 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| **2.1** | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| **2.2** | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| **2.3** | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| **2.4** | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| **2.5** | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| **2.6** | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| **2.7** | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| **2.8** | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| **2.9** | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| **3.0** | 0.0013 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| **3.1** | 0.0010 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0007 | 0.0007 |
| **3.2** | 0.0007 | 0.0007 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 |
| **3.3** | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0003 |
| **3.4** | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0002 |

## Tabel cumulatieve kans van de standaardnormale verdeling.

(Zie Grasple voor waardes groter dan 1)

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |