Essential Skills Mathematics

Modulewijzer

Module S2

Kansberekening

Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben moet de student:

- Kansen kunnen berekenen met dobbelstenen
- Kansen kunnen berekenen met een vaas en knikkers
- Weten hoe je een verwachtingswaarde moet berekenen
- Weten hoe je permutaties en combinaties in kansvraagstukken moet toepassen

Onderwerpen

S2.1. Het berekenen van kansen met dobbelstenen

S2.2. Het berekenen van kansen met een vaas en knikkers

S2.3. Het berekenen van een verwachtingswaarde

S2.4. Het toepassen van permutaties en combinaties in kansvraagstukken

S2.1. Het berekenen van kansen met een dobbelsteen

Bij kansrekenen gaat het om rekenen aan iets waarvan je niet met zekerheid kan zeggen dat het zo is. De vraag “wat zou de kans zijn op”, ligt hieraan ten grondslag. Kansrekenen wordt vaak toegepast bij kansspellen.

Een kans ligt tussen 2 waarden. Afhankelijk van hoe je de kans uitdruk kan dit zijn:
Tussen de 0% en 100%.
Tussen de 0 en 1.

Voorbeeld 1
We beginnen met een bekend kansvraagstuk**:** Jan gooit met twee dobbelstenen. Bereken de kans dat de som van de ogen kleiner dan 11 is.

Bij een vraagstuk van dit type is het handig om de onderstaande overzichtelijke tabel te maken. In de helemaal linksstaande eerste kolom staan de werpresultaten van steen 1 vermeld. En in de bovenste rij staan de werpresultaten van de tweede steen vermeld. In de tabel vind je dan het totaal van de werpresultaten. Zo vind je, als je met dobbelsteen 1 een 5 gegooid hebt en met dobbelsteen 2 een 3 het totaal van 8 ogen in de 6^de^ rij en 4^de^ kolom.

	Dobbel-steen 2: 1	Dobbel-steen 2: 2	Dobbel-steen 2: 3	Dobbel-steen 2: 4	Dobbel-steen 2: 5	Dobbel-steen 2: 6
Dobbel-steen 1: 1	2	3	4	5	6	7
Dobbel-steen 1: 2	3	4	5	6	7	8
Dobbel-steen 1: 3	4	5	6	7	8	9
Dobbel-steen 1: 4	5	6	7	8	9	10
Dobbel-steen 1: 5	6	7	**8**	9	10	11
Dobbel-steen 1: 6	7	8	9	10	11	12

Elke worp is even waarschijnlijk. Er zijn dus 36 gelijke mogelijkheden. Tel nu het aantal cellen waarin een totaal kleiner dan 11 staat bij elkaar op. Dat zijn 33 cellen. Dan is de kans op een uitkomst kleiner dan 11 te berekenen met een formule voor P(G), een formule voor de kans op een *gunstige* gebeurtenis:

$$P(G) = P(<11) = \frac{aantal\ gunstige\ mogelijkheden}{totale\ aantal\ gelijkwaardige\ mogelijkheden} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

Je kan dit kansvraagstuk ook oplossen via de volgende formule (de *complementregel*):

$P(I) + P(\bar{I}) = 1$

waarin: P(I) = de kans dat I gebeurt en $P(\bar{I})$ de kans dat I *niet* gebeurt. Dan is I dus het gooien van een totaal aantal ogen *klein*er dan 11 en I betekent het gooien van *11 of hoger*. De kans op 11 of hoger is 3/36 = 1/12 , dus de kans op het gooien van een totaal kleiner dan 11 is gelijk aan: 1 – (1/12) = 11/12 .

Veel kansvraagstukken, b.v. op het terrein van gokspelen, van kaarten, van lotto's, enz. kunnen in de vorm van een *vaasmodel met knikkers* gegoten worden. We introduceren dit vaasmodel met het volgende voorbeeld:

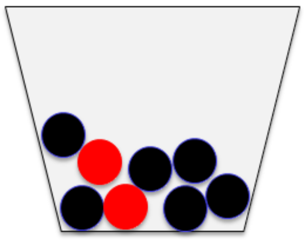
Opgave S2.1.

a) Erin gooit met twee dobbelstenen. Bereken de kans dat de som van de ogen 9 is. Geef het antwoord in 2 decimalen.
b) Luka gooit met twee dobbelstenen. Bereken de kans dat de som van de ogen kleiner dan 6 is. Geef het antwoord in 2 decimalen.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

S2.2. Het berekenen van kansen met een vaas en knikkers

Voorbeeld 1
In een vaas bevinden zich 6 zwarte knikkers en 2 rode knikkers.



Uit deze vaas worden 3 knikkers getrokken. Het trekken van knikkers uit een vaas kan op twee manieren gebeuren:

a) *met terugleggen*
b) *zonder terugleggen*

De kansen bij de situatie met terugleggen, situatie a, zijn anders dan bij situatie b, de situatie zonder terugleggen.

Voorbeeld 1a

Bereken de kans dat je *met terugleggen* 2 zwarte en 1 rode knikker trekt als je driemaal een knikker uit de vaas trekt.

Je trekt dus driemaal achter elkaar een knikker uit de vaas *met terugleggen.*
Stel jezelf voor, dat je de eerste knikker pakt, je noteert de kleur, je legt hem terug, je schudt de vaas grondig, je pakt daarna de tweede knikker, enzovoorts.

Indien je met terugleggen knikkers uit de vaas neemt, dan verandert de kans op het trekken van een zwarte knikker niet en de kans op het trekken van een rode knikker verandert ook niet. Want waarom zouden die kansen veranderen? Je trekt driemaal een knikker uit een vaas met 2 rode en 6 zwarte knikkers, dus de situatie is driemaal hetzelfde.

Er zijn 8 knikkers, dus je hebt 8 gelijke mogelijkheden om een knikker te trekken. Uitgangspunt is, dat alle 8 knikkers gelijk van grootte zijn, even zwaar zijn, gelijke vorm en oppervlak hebben en dat er telkens goed geschud is, enz. enz.

In geval van het trekken van een rode knikker heb je *twee* gunstige mogelijkheden. Dus de kans op het trekken van een rode knikker, geschreven als P(rood) = P(R) met de P als afkorting van het woord *probability* (= kans), is gelijk aan:

$$P(R) = \frac{aantal\ gunstige\ mogelijkheden}{totale\ aantal\ gelijkwaardige\ mogelijkheden} = \frac{2}{8}$$

In geval van het trekken van een zwarte knikker heb je *zes* gunstige mogelijkheden. Dus de kans op het trekken van een zwarte knikker, geschreven als P(zwart) = P(Z) met de P als afkorting van het woord *probability* (= kans), is gelijk aan:

$$P(Z) = \frac{aantal\ gunstige\ mogelijkheden}{totale\ aantal\ gelijkwaardige\ mogelijkheden} = \frac{6}{8}$$

Er zijn *drie* mogelijkheden om 2 zwarte knikkers en 1 rode te trekken.
Zie onderstaande tabel:

	eerste beurt	**tweede beurt**	**derde beurt**
mogelijkheid 1	⚫	⚫	🔴
mogelijkheid 2	⚫	🔴	⚫
mogelijkheid 3	🔴	⚫	⚫

Het is nu belangrijk om te beseffen dat deze drie mogelijkheden *elkaar uitsluiten*. Oftewel: als mogelijkheid 1 optreedt dan kan niet tegelijk mogelijkheid 2 optreden, want ze zijn verschillend. Je kan het vergelijken met de 6 kansen bij een dobbelsteen: als je een 2 werpt, dan kan je niet een 1,3,4,5 of 6 werpen. Echter, de kans op een 2 bij een dobbelsteen en de kans op een *even* worp bij een dobbelsteen sluiten elkaar *niet* uit. De les die je hier uit moet trekken is, dat je controleert of kansen elkaar wel of niet uitsluiten.

We moeten nu (geformuleerd in een lange zin) berekenen:
De kans om bij driemaal een knikker met terugleggen te trekken in de eerste beurt een zwarte te trekken, in de tweede beurt ook een zwarte en in de derde beurt een rode OF in de eerste beurt een zwarte te trekken, in de tweede beurt een rode en in de derde beurt een zwarte OF in de eerste beurt een rode te trekken, in de tweede beurt een zwarte en in de derde beurt een zwarte.

Met zo'n lange zin valt niet te werken. We korten deze zin als volgt in :
P(Z EN Z EN R OF Z EN R EN Z OF R EN Z EN Z)

Aangezien de drie genoemde mogelijkheden *elkaar uitsluiten*, mogen we ze *optellen.* Bovvenstaande uitdrukking wordt dan:

P(Z EN Z EN R) + P(Z EN R EN Z) + P(R EN Z EN Z)

De kans om bij de eerste keer een zwarte knikker te pakken is $\frac{6}{8}$. De kans om de tweede keer een zwarte knikker te pakken is ook $\frac{6}{8}$ (aangezien de gepakte knikker na de eerste keer weer wordt teruggelegd). De kans om bij de eerste keer *en* de tweede keer een zwarte knikker te pakken is $\frac{6}{8} * \frac{6}{8} = \frac{36}{64}$. We mogen daarom het tussenvoegsel EN door een maalteken vervangen. We krijgen:
P(Z) * P(Z) * P(R)   +   P(Z) * P(R) * P(Z)   +   P(R) * P(Z) * P(Z)

Zoals hierboven ook aangegeven geldt dat door het terugleggen en goed schudden de kansen niet veranderen, dus P(Z)= $\frac{6}{8}$ en P(R)= $\frac{2}{8}$. Dat betekent dat de drie termen die hierboven zijn genoemd, gelijk zijn. We kunnen dus gewoon driemaal de eerste term nemen:

P(2 zwarte en 1 rode) = $3 * \frac{6}{8} * \frac{6}{8} * \frac{2}{8} = \frac{216}{512} = \frac{27}{64}$ = 0,421875.

Op 4 decimalen achter de komma afgerond: P(2 zwarte en 1 rode) = 0,4219 (42.19%).

Voorbeeld 1b
Nu *zonder terugleggen:* ook in de situatie zonder terugleggen hebben we te maken met de drie mogelijkheden ZZR , ZRZ en RZZ , zoals behandeld bij de situatie met terugleggen.

	eerste beurt	tweede beurt	derde beurt
mogelijkheid 1	●	●	●
mogelijkheid 2	●	●	●
mogelijkheid 3	●	●	●

Dus de kans is gelijk aan:

P(Z EN Z EN R   OF   Z EN R EN Z   OF   R EN Z EN Z)

Ook in de situatie zonder terugleggen sluiten de drie mogelijkheden elkaar uit, dus kan je schrijven als:

P(Z EN Z EN R) + P(Z EN R EN Z) + P(R EN Z EN Z)

Het verschil is, dat de kansen nu wel veranderen.
P(Z) is niet altijd $\frac{6}{8}$ en P(R) is niet altijd $\frac{2}{8}$.

Hieronder is te zien dat als je een tweede knikker wil pakken, je nog maar kan kiezen uit 6 knikkers i.p.v. 7 knikkers. Of dat 6 zwarte knikkers zijn en 1 rode knikker, of 6 zwarte knikkers en 2 rode knikkers, hangt af van welke knikker is gepakt bij de eerste beurt. Bij de derde beurt zijn er nog maar 6 knikkers in de vaas. Ook hier geldt weer dat welke gekleurde knikkers nog aanwezig zijn, afhankelijk is van datgene wat bij beurt 1 en 2 is gepakt.

Stel dat je bij de eerste beurt een zwarte knikker pakt. Je trekt eerst een zwarte knikker, dus P(Z) is gelijk aan $\frac{6}{8}$. Nu wordt niet teruggelegd, dus er zijn nog 7 knikkers over, waarvan 5 zwarte knikkers en 2 rode knikkers. Dus de kans P(Z) op een zwarte in de tweede trekking is gelijk aan $\frac{5}{7}$. Stel dat je bij de tweede beurt weer een zwarte knikker pakt. Aangezien er weer niet wordt teruggelegd, zijn er 6 knikkers over, waarvan 4 zwarte knikkers en 2 rode knikkers. De kans op een rode in de derde trekking is daarom $\frac{2}{6}$. Dus we vinden P(Z EN Z EN R) = P(Z) * P(Z) * P(R) = $\frac{6}{8} * \frac{5}{7} * \frac{2}{6} = \frac{6 * 5 * 2}{8 * 7 * 6} = \frac{60}{336}$.

Op dezelfde wijze redenerend wordt de tweede term P(Z EN R EN Z) = P(Z) * P(R) * P(Z) = $\frac{6}{8} * \frac{2}{7} * \frac{5}{6}$ en dat is ook gelijk aan $\frac{60}{336}$.

De derde term P(R EN Z EN Z) wordt dan $\frac{2}{8} * \frac{6}{7} * \frac{5}{6} = \frac{60}{336}$.

We zien dus dat ook in de situatie zonder terugleggen de drie termen P(Z EN Z EN R), P(Z EN R EN Z) en P(R EN Z EN Z), gelijk zijn, dus de gevraagde kans is daarom gelijk aan: $3 * \frac{60}{336} = \frac{180}{336} = \frac{15}{28} = 0{,}53571$.

Op 4 decimalen achter de komma afgerond is dat: 0,5357 ofwel een kans van 53,57% .

Voorbeeld 2
Bij een instituut zijn 165 studenten ingeschreven.

Hiervan zijn 30 studenten verkeerskunde studenten. In het vervolg aangeduid met het symbool V, of met het symbool:

Ook zijn er 135 studenten bouwkunde. Er worden willekeurig 3 studenten uitgekozen. De studentennamen worden op muntjes geschreven en daarna worden de muntjes in een vaas gestopt en flink geschud. Aangeduid met een B, of met het symbool:

Voorbeeld 2a
Men trekt met terugleggen drie muntjes uit de vaas. Hoe groot is de kans dat er precies 2 verkeers-studenten aangetroffen worden bij de 3 getrokken studenten ?

Met terugleggen betekent dat de kans P(V) op een verkeersstudent altijd gelijk is, namelijk P(V) = $\frac{30}{165}$.
En ook de kans P(B) op een bouwkundestudent is altijd gelijk namelijk P(B) = $\frac{135}{165}$.

Om nu de kans op 2 verkeersstudenten te berekenen moet je drie mogelijkheden onderzoeken:

	eerste beurt	**tweede beurt**	**derde beurt**
mogelijkheid 1			
mogelijkheid 2			
mogelijkheid 3			

De kans op deze drie mogelijkheden kan je, net als bij voorbeeld 2, in het kort als volgt opschrijven :

P (**B** EN **V** EN **V** OF **V** EN **B** EN **V** OF **V** EN **V** EN **B**)

Als **BVV** plaatsvindt, dan kan **VBV** of **VVB** niet plaatsvinden. Dit zijn dus weer *elkaar uitsluitende* kansen. Dan mag je de deelkansen *optellen*:

P(B EN V EN V) + P(V EN B EN V) + P(V EN V EN B)

We mogen hier ook weer het tussenvoegsel EN door een maalteken vervangen. We krijgen:

P(B * V * V) + P(V * B * V) + P(V * V * B)

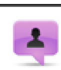
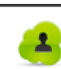
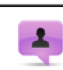
Wat hier ook weer opvalt is dat:

P(B * V * V) = P(V * B * V *) = P(V * V * B) = $\frac{30}{165} * \frac{30}{165} * \frac{135}{165}$.

Dus de gevraagde kans is gelijk aan:
3 *$\frac{30}{165} * \frac{30}{165} * \frac{135}{165}$ = 0,081142 . Afgerond op 4 decimalen: 0,0811. Of in percentages: 8,11%

Voorbeeld 2b
Nu trek je *zonder* terugleggen drie muntjes uit de vaas. Hoe groot is nu de kans dat je 2 verkeersstudenten aantreft bij de 3 getrokken studenten ?

Zonder terugleggen betekent dat de kans P(V) op een verkeersstudent niet altijd gelijk is en ook de kans P(B) op een bouwkundestudent is niet altijd gelijk.

	eerste beurt	tweede beurt	derde beurt
mogelijkheid 1			
mogelijkheid 2			
mogelijkheid 3			

We moeten weer drie mogelijkheden onderzoeken:
Deze kans op drie mogelijkheden kan je in het kort als volgt opschrijven :

P (B EN V EN V   OF   V EN B EN V   OF   V EN V EN B)

Als BVV plaatsvindt, dan kan VBV of VVB niet plaatsvinden. Dit zijn dus weer *elkaar uitsluitende* kansen. In deze situatie mag je dan de deelkansen weer *optellen* :

P(B EN V EN V) + P(V EN B EN V) + P(V EN V EN B)

De berekening van deze kansen gaat nu anders dan bij het geval met terugleggen. Richten we onze aandacht op P(B EN V EN V), ofwel de kans op eerst een bouwkundestudent, daarna een verkeersstudent en daarna weer een verkeersstudent, dan geldt:

P(B EN V EN V) = $\frac{135}{165} * \frac{30}{164} * \frac{29}{163}$

Toelichting: de kans op de eerste bouwkundestudent is natuurlijk 135/165. *Maar omdat het zonder terugleggen is, is er nu een bouwkundestudent minder.* Er blijven 164 studenten over: 134 bouwkundestudenten en 30 verkeersstudenten. De kans op een verkeersstudent is dan $\frac{30}{164}$, *maar nu verdwijnt een verkeerstudent*, dus er blijven 163 studenten over waarvan 29 verkeerstudenten. Dan is de kans om weer een verkeersstudent te trekken gelijk aan $\frac{29}{163}$.

Ook hier geldt weer dat de volgende kansen: P(B EN V EN V), P(V EN B EN V) en P(V EN V EN B), aan elkaar gelijk zijn. De gevraagde kans wordt dus:

P(B * V * V) = P(V * B * V *) = P(V * V * B) = $\frac{135}{165} * \frac{30}{164} * \frac{129}{163}$.

Dus de gevraagde kans is gelijk aan:
3 * $\frac{135}{165} * \frac{30}{164} * \frac{129}{163}$ = 0,0799. Of in percentages: 7,99%

Voorbeeld 2c
Hoe groot is de kans dat je *minstens* twee verkeersstudenten aantreft in een groepje van 3 studenten indien je dit doet *met* terugleggen?

De kans op *minstens* twee verkeersstudenten betekent dat je moet uitrekenen de kans op twee verkeersstudenten + de kans op 3 verkeersstudenten. De kans op twee verkeersstudenten hadden we al berekend bij voorbeeld 3a en was gelijk aan 0,0811.

We hoeven nu alleen nog de kans op 3 verkeersstudenten met terugleggen uit te rekenen: $\frac{30}{165} * \frac{30}{165} * \frac{30}{165}$ = 0,0060. Dus de gevraagde kans is gelijk aan 0,0811 + 0,0060 = 0,0871. Oftewel: 8,71%.

Voorbeeld 2d
Hoe groot is de kans dat je *minstens* twee verkeersstudenten aantreft in een groepje van 3 studenten indien je dit doet *zonder* terugleggen?

De kans op *minstens* twee verkeersstudenten betekent dat je moet uitrekenen de kans op twee verkeersstudenten + de kans op 3 verkeersstudenten.

De kans op twee verkeersstudenten hadden we al berekend bij voorbeeld 3b en was gelijk aan 0,0799.

De kans op 3 verkeersstudenten *zonder* terugleggen is gelijk aan $\frac{30}{165} * \frac{29}{164} * \frac{28}{164}$ = 0,0055.
Dus de gevraagde kans is gelijkaan 0,0799 + 0,0055 = 0,0854. Oftewel: 8,54%

Opgave S2.2.1

Een vaas bevat 15 rode knikkers, 12 gele knikkers en 7 blauwe knikkers. Er worden zonder terugleggen 3 knikkers uit deze vaas getrokken. Bereken met een nauwkeurigheid van 4 decimalen achter de komma de kans dat er 2 blauwe knikkers getrokken worden.

Opgave S2.2.2

Er wordt een bingoavond georganiseerd. Er zullen 77 personen aanwezig zijn, dus er zitten 77 lootjes in de pot met prijzen. Er zijn 6 derde prijzen, 3 tweede prijzen en 1 eerste prijs te verdelen. Jan, Piet en Clarence mogen die avond als eerste, tweede en derde een lootje trekken. Gevraagd :

a. wat is de kans dat Jan de eerste prijs trekt , daarna Piet een tweede prijs en tot slot Clarence een derde prijs ?
b. wat is de kans dat Jan een tweede prijs trekt, dan Piet de eerste prijs en tenslotte Clarence een derde prijs ?
c. wat is de kans dat Jan een tweede prijs trekt, dan Piet een derde prijs en tot slot Clarence een eerste prijs ?
d. wat is de kans dat Jan, Piet en Clarence met z'n drieën een eerste prijs, een tweede prijs en een derde prijs trekken, waarbij het onbelangrijk is, wie welke prijs gewonnen heeft ?

(Hint: vertaal dit probleem naar een vaasmodel. Na elke trekking wordt goed geschud)

[Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.]

S2.3. Het berekenen van de verwachtingswaarde

In de vorige paragraaf hebben we gezien hoe je de kans kan berekenen dat zich een specifieke situatie voordoet. Zoals bijvoorbeeld:

- De kans dat je 11 of minder gooit, als je gooit met 2 dobbelstenen.
- De kans dat je 2 zwarte en 1 rode knikker uit een vaast pakt, als er in totaal 2 rode en 6 zwarte knikkers zijn.

In deze paragraaf wordt aan "het gooien van een bepaald getal" of aan "het pakken van een bepaalde kleur knikker" een waarde gehangen. Nu is het interessant om te weten, wat de verwachte winst is. Dit wordt ook wel de *verwachtinswaarde* genoemd.

Definitie
De *verwachtingswaarde* is wat je verwacht uiteindelijk gemiddeld te kunnen halen als je een kansexperiment maar vaak genoeg herhaald.

Voor het oplossen van dit soort vraagstukken, volg je de volgende stappen:

Stap 1) Wat zijn alle mogelijke uitkomsten?
Stap 2) Wat zijn de kansen op die uitkomsten?
Stap 3) Bereken voor elke uitkomst: **kans op die uitkomst * winst bij die uitkomst**
Stap 4) Tel de resultaten gevonden bij (3) op. Je vindt dan de *verwachtingswaarde* van de winst.

We behandelen nu een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1
Je bent aan het dobbelen met één dobbelsteen. Indien je een 5 gooit, dan krijg je € 5,- . Gooi je een 4 dan krijg je €10,-. Gooi je een ander aantal ogen (1,2,3, of 6) dan moet je € 4,- betalen. Moet je op deze weddenschap ingaan? Met andere woorden: zal je op de lange duur winnen of verliezen? Statistisch geformuleerd: wat zal op de lange duur jouw gemiddelde winst per worp zijn, oftewel wat is de *verwachtingswaarde van de winst per worp*?

Stap 1) De mogelijke uitkomsten zijn: 1, 2, 3, 4, 5, en 6.
Stap 2) De kans op 1, die we aangeven met P(1) is gelijk aan $\frac{1}{6}$, dus P(1) = $\frac{1}{6}$. De kans van $\frac{1}{6}$ geldt ook voor P(2) , P(3) , P(4) , P(5) en P(6).
Stap 3) Uitkomst 1: P(1) * winst bij gooien van een 1 = (1/6) * (-4) = $-\frac{4}{6}$ euro

Uitkomst 2: P(2) * winst bij gooien van een 2 = (1/6) * (-4) = -$\frac{4}{6}$ euro
Uitkomst 3: P(3) * winst bij gooien van een 3 = (1/6) * (-4) = -$\frac{4}{6}$ euro
Uitkomst 4: P(4) * winst bij gooien van een 4 = (1/6) * (10) = $\frac{10}{6}$ euro
Uitkomst 5: P(5) * winst bij gooien van een 5 = (1/6) * (5) = $\frac{5}{6}$ euro.
Uitkomst 6: P(6) * winst bij gooien van een 6 = (1/6) * (-4) = -$\frac{4}{6}$ euro

Stap 4) De verwachtingswaarde van de winst is nu: 4 * -$\frac{4}{6}$ + $\frac{10}{6}$ + $\frac{5}{6}$ = -$\frac{1}{6}$ euro.

Commentaar: *gemiddeld* zal je op de lange duur dus $\frac{1}{6}$ euro verliezen per worpbeurt. Dat betekent dat je na 120 keer een worp doen een verlies van 120 * $\frac{1}{6}$ = € 20,- mag verwachten. Het mooie van deze berekening is dat je *van tevoren al* het resultaat kunt voorspellen, zonder maar een enkele steen gegooid te hebben.

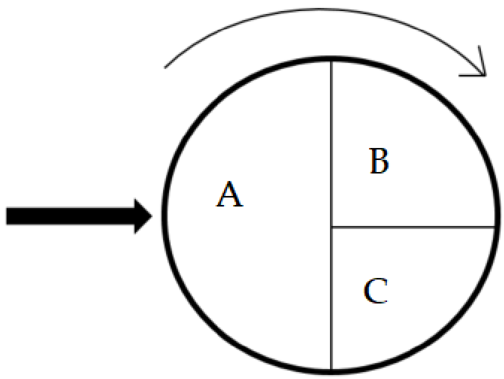
Voorbeeld 2
Je zit aan de roulettetafel (met 18 rode nummers, 18 groene nummers en 1 neutraal nummer: 0). Je speelt bij elk nieuw spel op rood. Telkens zet je bij een nieuw spel 1 euro in. Kom je op rood, dan verdubbelt je inleg zich. Kom je op zwart of de neutrale 0, dan ben je je geld kwijt. Wat zal je gemiddelde winst, oftewel de *verwachtingswaarde van de winst* zijn na vele keren spelen?

We volgen weer het schema:
Stap 1) De uitkomsten zijn: 1, 2, 3, 4, ... , 35, 36, en 0.
Stap 2) De kansen zijn gelijk, namelijk $\frac{1}{37}$, dus P(0)=P(1)=P(2)=P(3)= . . . . = P(35) = P(36) = $\frac{1}{37}$.
Stap 3) Voor de 18 rode getallen geldt : P(rood) * winst = $\frac{1}{37}$ * (2 - 1) = $\frac{1}{37}$ euro.
Voor de 18 groene getallen geldt : P(groen) * winst = $\frac{1}{37}$ * -1 = - $\frac{1}{37}$ euro.
Voor de neutrale 0 geldt: P(0) * winst = $\frac{1}{37}$ * -1 = - $\frac{1}{37}$ euro.
Stap 4) De verwachtingswaarde van de winst is : 19 * - $\frac{1}{37}$ + 18 * $\frac{1}{37}$ = - $\frac{1}{37}$ euro.

Conclusie: Deze berekening laat zien dat de strategie om alleen op rood te spelen tot verlies leidt.

Voorbeeld 3
Er is een cirkelvormig rad van fortuin. De oppervlakte van de cirkel is in drie sectoren verdeeld: één met een middelpuntshoek van 180 graden (sector A) en twee met een middelpuntshoek van 90 graden (de sectoren B en C). Er is ook nog een stilstaande pijl

aanwezig, die in een bepaalde sector zal staan als het rad uitgedraaid is. Bevind de pijl zich in A, dan is de winst € 3,-. Bij B is de winst € 5,- en bij C is de winst 8 €. Gevraagd:
a) bereken de *verwachtingswaarde van de winst* als elk spel uit éénmaal draaien bestaat.
b) bereken de *verwachtingswaarde van de winst* als elk spel uit 20 maal draaien bestaat.



Vraag a)
Stap 1) De uitkomsten zijn: pijl in sector A , pijl in sector B en pijl in sector C
Stap 2) P(pijl in A) = P(A) = $\frac{1}{2}$, en P(B) = P(C) = $\frac{1}{4}$.
Stap 3) Voor A geldt: P(A) * winst = $\frac{1}{2} * 3 = \frac{3}{2}$ = € 1,50
Voor B geldt: P(B) * winst = $\frac{1}{4} * 5 = \frac{5}{4}$ = € 1,25
Voor C geldt: P(C) * winst = $\frac{1}{4} * 8$ = € 2,00
Stap 4) De verwachtingswaarde van de winst is: 1,5 + 1,25 + 2 = € 4,75

Vraag b)
De verwachtingswaarde van de winst bij 20 keer spelen is 20 * 4,75 = € 95,-.

Opgave S2.3.1

Je doet mee aan een Hackathon wedstrijd. Per team kost het 10 euro om mee te doen. In totaal doen er 30 teams mee. Er zijn drie prijzen te winnen:

- 1^e prijs: 100 euro
- 2^e prijs: 50 euro
- 3^e prijs: 25 euro

Uitgangspunt: Alle teams hebben een gelijke kans om te winnen.

Bereken de verwachtingswaarde van de winst van een team.

Opgave S2.3.2

Bij een brug over de rivier de vecht in Weesp treden weleens storingen op in de bediening. Het aantal storingen is in de loop van de jaren bijgehouden. De volgende kansfunctie van het aantal storingen *per maand* wordt opgesteld.

Aantal storingen	Kans
0	0,37
1	0,26
2	0,20
3	0,11
4	0,06

Bereken het verwachte aantal storingen *per jaar*. Het antwoord geven in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave S2.3.3

Een aantal personen dat in een willekeurig uur opbelt naar de klantenservice van het bedrijf United Ltd wordt beschreven door de volgende kansfunctie die in de onderstaande tabel gepresenteerd wordt:.

Aantal personen	Kans
0	0,44
1	0,22
2	0,18
3	0,13
4	0,03

a) Hoe groot is de kans dat er in een willekeurig uur minstens 3 mensen bellen? (op twee decimalen)
b) Hoe groot is de kans dat er in een willekeurig uur minder dan 3 mensen bellen? (op twee decimalen)
c) Bereken de verwachtingswaarde in twee decimalen nauwkeurig van het aantal mensen dat belt op een willekeurige werkdag van 8 uur

Opgave S2.3.4

Alle eerstejaarsstudenten van de opleiding HBO-ICT volgen het "Fasten Your Seatbelt" (FYS) project. De opdrachtgever van dit project is Corendon. Van de in totaal 200 FYS groepjes, mogen er uiteindelijk drie groepjes hun idee pitchen bij Corendon. Het team met de beste pitch wint 250 euro. De andere twee teams die pitchen winnen 100 euro.

Uitgangspunten:

- Alle teams hebben een gelijke kans om uitgekozen te worden om te pitchen.
- De kans om eerste, tweede of derde te worden bij het pitchen, is gelijk.

Bereken de verwachtingswaarde van de winst van een team.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

S2.4. Het toepassen van permutaties en combinaties en kansvraagstukken

In deze paragraaf gaan we in op het verschil tussen permutaties en combinaties in kansvraagstukken.

Het verschil heeft te maken met het feit of er wel of niet sprake is van rangschikking.

Rangschikking is van grote invloed op het aantal mogelijkheden bij telproblemen. Wanneer de rangschikking van belang is zijn er namelijk veel meer mogelijkheden dan wanneer de rangschikking niet van belang is.

Definitie permutatie Als je **k** objecten kiest uit een verzameling van **n** objecten, waarbij ieder object hoogstens éénmaal gekozen wordt en waarbij **wel** gelet wordt op de volgorde van de objecten.

Stel we kijken we naar de getallen 1 en 2. Deze cijfers kunnen we op twee verschillende manieren rangschikken, namelijk: 12 en 21 . Vervolgens kijken we naar de getallen 1, 2 en 3. Deze drie cijfers kunnen we rangschikken op 6 verschillende manieren, namelijk: 123, 132, 213, 231, 312, en 321. In plaats van getallen kan je ook objecten nemen, of mensen, enz. Rangschikking wordt ook wel permutatie genoemd. Het aantal permutaties is als volgt te berekenen:

Voor 1 getal, of student, enz. is het aantal permutaties:	1
Voor 2 getallen, studenten, enz. is het aantal permutaties:	2 * 1 = 2
Voor 3 getallen, studenten, enz. is het aantal permutaties:	3 * 2 * 1 = 6
Voor 4 getallen, studenten, enz. is het aantal permutaties:	4 * 3 * 2 * 1 = 24
Voor 5 getallen, studenten, enz. is het aantal permutaties:	5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120

Algemeen:
Bij n objecten is het aantal permutaties gelijk aan: n * (n-1) * (n-2) * … * 3 * 2 * 1 = n!
n!, spreek je uit als "n faculteit".

Een voorbeeld waarbij sprake is van permutatie:
Als uit een groep van 30 studenten, 3 winnaars worden aangewezen en een 1^e prijs, 2^e prijs en 3^e prijs wordt uitgereikt.

De vraag is nu, op hoeveel manieren kan een 1^e, 2^e en 3^e prijs worden uitgereikt aan een groep van 30 studenten.

Algemeen:
Het aantal manieren waarop men k objecten (in dit geval 3 studenten), uit n objecten (in dit geval 30 studenten) kan kiezen, waarbij de rangschikking van belang is, wordt aangegeven door de volgende formule: $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Voor dit specifieke voorbeeld geldt:

$\frac{30!}{(30-3)!} = \frac{30!}{27!} = \frac{30 * 29 * 28 * 27 * \ldots * 2 * 1}{27 * 26 * \ldots * 2 * 1} = 30 * 29 * 28 = 24360$ verschillende mogelijkheden.

Definitie combinatie
Als je **k** objecten kiest uit een verzameling van **n** objecten, waarbij ieder object hoogstens één maal gekozen wordt en waarbij **niet** gelet wordt op de volgorde van de objecten.

Stel we kijken weer naar de getallen 1 en 2. De volgorde van deze cijfers is nu niet van belang. Vervolgens kijken we weer naar de getallen 1, 2 en 3. Wanneer rangschikking niet van belang is dan tellen de zes ordeningen samen voor één mogelijkheid. We spreken dan van combinaties. De combinatie van de cijfers 1, 2 en 3 kan in dit geval maar één keer voorkomen.

Een voorbeeld waarbij sprake is van combinatie:
Als uit een groep van 30 studenten, 3 studenten worden aangewezen die mee mogen op studiereis.

In dit voorbeeld is er sprake van combinatie, omdat de rangschikking niet van belang is.

De vraag is nu, op hoeveel manieren kunnen 3 studenten worden uitgekozen uit een groep van 30 studenten.

Algemeen:
Het aantal manieren waarop men k objecten (in dit geval 3 studenten), uit n objecten (in dit geval 30 studenten) kan kiezen, ook wel het aantal combinaties genoemd, wordt aangegeven door de volgende formule: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Voor dit specifieke voorbeeld geldt:

$\frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{30!}{3! * 27!} = \frac{30 * 29 * 28 * 27 * \ldots * 2 * 1}{(3 * 2 * 1) * (27 * 26 * \ldots * 2 * 1)} = \frac{30 * 29 * 28}{3 * 2 * 1} = \frac{24360}{6} = 4060$ verschillende mogelijkheden.

Het verschil in uitkomst bij dit vraagstuk ten opzichte van het vraagstuk waarbij een 1e, 2e en 3e prijs werd uitgereikt is, dat de uitkomst nu 3!, oftewel 6 keer zo laag is. Dit heeft te maken met het feit dat er géén sprake is van rangschikking van de 3 studenten (oftewel 3!).

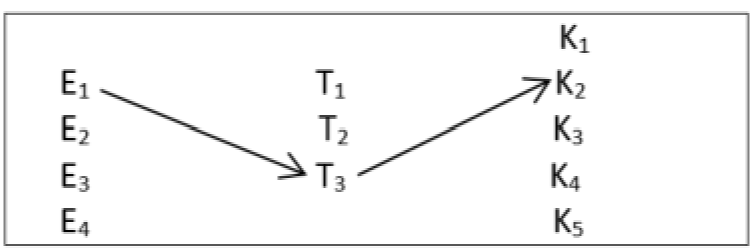
Conclusie

Het verschil tussen permutatie en combinatie heeft te maken met het feit dat de volgorde, oftewel de rangschikking bij permutatie wel van belang is en bij combinatie niet van belang is.

Voorbeeld 1

We beginnen met een voorbeeld uit de wereld van het onderwijs: bij een onderwijsinstituut moeten studenten 3 keuzevakken kiezen, namelijk Economie (E), een Taal (T) en een Kwantitatief Vak (K). Het vak Economie heeft drie keuzemogelijkheden, die we E_1 , E_2 en E_3 noemen. Taal heeft 4 keuzemogelijkheden: T_1 , T_2 , T_3 en T_4 . En tenslotte heeft het vak Kwantitatief 5 keuzemogelijkheden K_1 , K_2 , K_3 , K_4 en K_5. De vraag is nu: hoeveel verschillende pakketten kan de student hieruit samenstellen?

In het schema hieronder (zie de twee pijlen) is een willekeurig pakket gekozen: E_1 , T_3 en K_2 . Iedere economieoptie is te combineren met 3 taalopties, dus in totaal heb je 12 mogelijke combinaties voor een economieoptie en een taaloptie. Elk van deze 12 mogelijkheden is te combineren met 5 kwantitatieve opties, dus in totaal zijn er 12 * 5 = 60 keuzemogelijkheden. Je moet dus om het totale aantal mogelijkheden te vinden het aantal opties van economie vermenigvuldigen met het aantal opties bij de taal en dan weer vermenigvuldigen met het aantal kwantitatieve opties.



Voorbeeld 2

Een groep van 5 mannen en 6 vrouwen wordt getraind voor een zeereis. Uiteindelijk kunnen er 4 mannen en 3 vrouwen mee. Op hoeveel manieren kan het team samengesteld worden?

Het gaat hier om een combinatie dus we gebruiken de volgende formule: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Het aantal manieren waarop 4 mannen uit een groep van 5 mannen gekozen kan worden is:

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(4 * 3 * 2 * 1)(1)} = \frac{5}{1} = 5$$

En het aantal manieren waarop 3 vrouwen uit een groep van 6 vrouwen gekozen kan worden is:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(3 * 2 * 1)(3 * 2 * 1)} = \frac{6 * 5 * 4}{3 * 2 * 1} = \frac{120}{6} = 20$$

Elke groep van 4 mannen kan gecombineerd worden met elke groep van 3 vrouwen. Er zijn dus 5 * 20 = 100 manieren om een team te vormen.

Voorbeeld 3
Er is een finale van het atletiekonderdeel 110m horden. Er doen 6 atleten aan mee.
Gevraagd:

a) Op hoeveel manieren kunnen de plaatsen 1 t/m 6 worden bezet ?
b) Op hoeveel manieren kunnen de medailles voor de eerste, tweede en derde prijs worden uitgereikt ?
c) De nummers 1 en 2 worden opgenomen in de selectie. Hoeveel tweetallen zijn mogelijk ?

a) Dit komt neer op het bepalen van het aantal permutaties van 6 atleten en dat is gelijk aan 6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720. Er zijn namelijk 6 mogelijkheden voor de eerste plaats, dan 5 mogelijkheden voor de tweede plaats, enz..
b) Ook hier is sprake van een permutatie. Echter worden aan 3 van de 6 atleten een prijs uitgereikt. We gebruiken hier dus de formule: $\frac{n!}{(n-k)!}$. Waarbij n is 6 en k is 3.
$$\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1} = 6 * 5 * 4 = 120$$

c) Bij deze vraag is er sprake van combinatie, aangezien de volgorde/rangschikking niet van belang is. We gebruiken hier dus de formule: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Waarbij n is 6 en k is 2.
$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(2 * 1)(4 * 3 * 2 * 1)} = \frac{6 * 5}{2 * 1} = \frac{30}{2} = 15.$$

Je kan ook redeneren: er zijn 6 manieren om een atleet te kiezen en daarna 5 manieren, dus 30 manieren. Daarna moet je door 2 delen vanwege het feit dat elk tweetal atleten er dan tweemaal inzit. Dus dan kom je ook op 15 mogelijkheden uit.

Opgave S2.4.1

Een groep van 7 mannen en 4 vrouwen worden getraind voor een zeereis op een wedstrijdjacht. Uiteindelijk zullen er 3 mannen en 3 vrouwen mee kunnen. Op hoeveel manieren kan het team op deze manier samengesteld worden?

Opgave S2.4.2

Bij de finale 100 meter schoolslag op de Olympische Spelen doen 10 deelnemers mee. Het aantal verschillende volgorden waarop de drie verschillende medailles kunnen worden verdeeld bedraagt:

O 720

O 10

O 10!

O 120

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

Antwoorden van de opgaven

Opgave S2.1.

a) Het aantal gunstige mogelijke uitkomsten is 4 (3 en 6; 4 en 5; 5 en 4; 6 en 3).
Totale aantal mogelijkheden is 36. De kans is dus: $\frac{4}{36}$ = 0.11

b) Het aantal gunstige mogelijke uitkomsten is 10. Luka kan namelijk:
- 2 gooien (gunstige mogelijkheid is 1)
- 3 gooien (gunstige mogelijkheid is 2)
- 4 gooien (gunstige mogelijkheid is 3)
- 5 gooien (gunstige mogelijkheid is 4)

Totale aantal mogelijkheden is 36. De kans is dus: $\frac{10}{36}$ = 0.28

Opgave S2.2.1.

$3 * \frac{7}{34} * \frac{6}{33} * \frac{27}{32}$ = 0.0948 (= 9.48 %).

Opgave S2.2.2.

a. $\frac{1}{77} * \frac{3}{76} * \frac{6}{75} = \frac{1}{77} * \frac{3}{76} * \frac{6}{75} = 0{,}000041 = 0{,}0041\%$
b. $\frac{3}{77} * \frac{1}{76} * \frac{6}{75} = 0{,}000041 = 0{,}0041\%$
c. $\frac{3}{77} * \frac{6}{76} * \frac{1}{75} = 0{,}000041 = 0{,}0041\%$
d. Er Zijn nu 3 mogelijkheden uitgewerkt onder onderdeel a,b en c. In totaal zijn er 6 verschillende combinaties mogelijk.
Dus geldt: 6 * $\frac{3}{77} * \frac{6}{76} * \frac{1}{75} = 0{,}000246 = 0{,}0246\%$

Opgave S2.3.1

Stap 1)
1^e prijs, 2^e prijs, 3^e prijs, geen prijs.

Stap 2)
1^e prijs: $\frac{1}{30}$, 2e prijs: $\frac{1}{30}$, 3e prijs: $\frac{1}{30}$, geen prijs: $\frac{27}{30}$

Stap 3)
1^e prijs: $\frac{1}{30}$ * (100 - 10) = $\frac{90}{30}$ = 3
2^e prijs: $\frac{1}{30}$ * (50 - 10) = $\frac{40}{30}$ = $\frac{4}{3}$ = 1,33

3^e prijs: $\frac{1}{30}$ * (25 - 10) = $\frac{15}{30}$ = 0,5
Geen prijs: $\frac{27}{30}$ * (0 - 10) = $\frac{-270}{30}$ = -9

Stap 4)
3 + 1,33 + 0,5 - 9 = -4,17 euro. Oftewel, € 4,17 verlies.

Opgave S2.3.2.

De verwachtingswaarde van het aantal storingen per maand is gelijk aan 0,37 * 0 + 0,26 * 1 + 0,20 * 2 + 0,11 * 3 + 0,06 * 4 = 1,23. Per jaar is dat natuurlijk 12 maal zo groot, dus 12x 1,23 = 14,76.

Opgave S2.3.3

a) P(3 of 4) = P(3) + P(4) = 0,16

b) P(0 of 1 of 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,44 + 0,22 + 0,18 = 0,84

c) Per uur is de verwachtingswaarde van het aantal personen gelijk aan: 0,44 * 0 + 0,22 * 1 + 0,18x2 + 0,13 * 3 + 0,03 * 4 = 1,09. Per 8-urige werkdag dus: 8 * 1,09 = 8,72.

Opgave S2.3.4

Stap 1)
Beste pitch, één van de andere twee pitches, geen pitch.

Stap 2)

- Kans beste pitch: $\frac{1}{200}$
- Kans andere twee pitches: $\frac{2}{200} = \frac{1}{100}$
- Kans om niet uitgekozen te worden om te pitchen: $\frac{197}{200}$

Stap 3)

- Beste pitch: $\frac{1}{200}$ * 250 = $\frac{5}{4}$ = 1.25
- Andere twee pitches: $\frac{1}{100}$ * 100 = 1
- Geen pitch: $\frac{197}{200}$ * 0 = 0

Stap 4)
1.25 + 1 + 0 = 2.25 euro.

Opgave S2.4.1

$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 * 6 * 5}{3 * 2 * 1} = \frac{210}{6} = 35$

$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4}{1} = 4$

35 mogelijkheden voor de mannen en 4 voor de vrouwen, dus: 35 * 4 = 140

Opgave S2.4.2

$\frac{10!}{(10-3)!} = 10 * 9 * 8 = 720$