Essential Skills Mathematics

Modulewijzer

Module E2

Goniometrie

Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben kun je:

1. sinus, cosinus en tangens in een rechthoekige driehoek definiëren en gebruiken.

2. goniometrische functies definiëren en graden naar radialen omrekenen alsook andersom

3. de formule van een goniometrische functie opstellen en aanpassen

4. goniometrische functies differentiëren

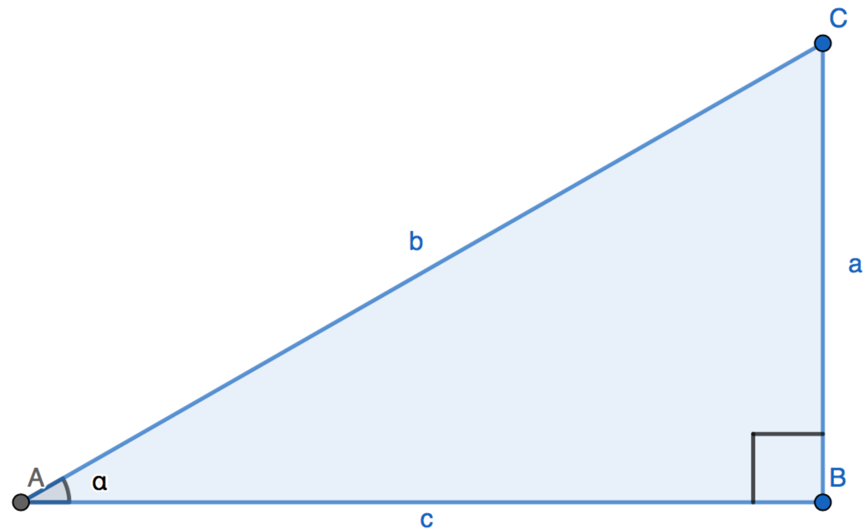
Onderwerpen

E2.1. *Goniometrie in de rechthoekige driehoek*
E2.2. *Functiebegrip, eenheidscirkel en graden/radialen*
E2.3. *Manipuleren van functies*
E2.4. *Differentiëren van goniometrische functies*

Antwoorden van de opgaven

E2.1. Sinus, cosinus, tangen in een rechthoekige driehoek

Sinus, cosinus en tangens van een hoek definiëren als een meetkundige verhouding tussen de zijden van een rechthoekige driehoek. Deze waarde van deze functies hangt alleen af van α. Dus, niet van de maat van de zijden van de driehoek.



Figuur 1

Gegeven de bovenstaande driehoek dan is:

$$\textbf{sin } \boldsymbol{\alpha} = \frac{overstaande}{schuine} = \frac{a}{b}$$

$$\textbf{cos } \boldsymbol{\alpha} = \frac{aanliggende}{schuine} = \frac{c}{b}$$

$$\textbf{tan } \boldsymbol{\alpha} = \frac{overstaande}{aanliggende} = \frac{a}{c}$$

De waarden van sin α, cos α en tan α kunnen wij gebruiken om de onbekende zijden en hoeken van een driehoek te berekenen. Met behulp van de bekende zijden en hoeken kun je dan alle zijden van een rechthoekige driehoek berekenen.

Een ezelsbruggetje om deze definities te onthouden is het toverwoordje: SOS CAS TOA.

Voorbeeld
Sinus van 30 graden, 30°, kan je berekenen door het in jouw rekenmachine in te toetsen. Als antwoord krijg je 0,5. Let daarbij op dat jouw rekenmachine in de goede modus staat; modus voor graden.

Stel dat α = 30° en b = 8 (schuine zijde).
Dan is a = b · sin α = 8 · sin 30° = 8 · 0,5 = 4.
Nu kunnen wij ook c uitrekenen. Door het gebruik van de formule voor tangens krijgen wij:

c · tan 30° = 4   c = 4/0,57735 = 6,92

Dus, als wij bij een rechthoekige driehoek twee bekenden hebben, dan kunnen wij de rest van de driehoek berekenen. Hebben we geen bekende hoek maar twee zijden dan moet je de wet van Pythagoras gebruiken:

$a^2 + b^2 = c^2$

Opgave E2.1.1.

Van de rechthoekige driehoek ABC is β de rechte hoek. De hoek α is de hoek bij de punt A . Bereken de zijden van de driehoek ABC met de gegevens:

a) α = 60°, a = 5

b) α = 32°, b= 8

c) γ = 67°, c = 8

d) γ = 63°, a = 9

Voorbeeld
Gegeven de zijden a = 6 en b = 13 kunnen wij ook de hoeken berekenen van zo een driehoek. Hiervoor gebruiken wij de formule sin α = $\frac{a}{b}$.

sin α = $\frac{6}{13}$ = 0,4615 = 27°

Dit kun je uitrekenen op de rekenmachine.

Opgave E2.1.2.

Van de rechthoekige driehoek ABC is β de rechte hoek. De hoek α is de hoek bij de punt A . Bereken hoek α van de driehoek ABC met de gegevens:

a) b = 33, c = 13

b) a = 7, c = 10.

c) b = 16, c = 13

d) a = 5, b = 8

Het deel van de wiskunde dat zich hiermee bezig houdt heet trigonometrie. Dat is de tak van wiskunde die zich bezig houdt met goniometrische functies in driehoeken.

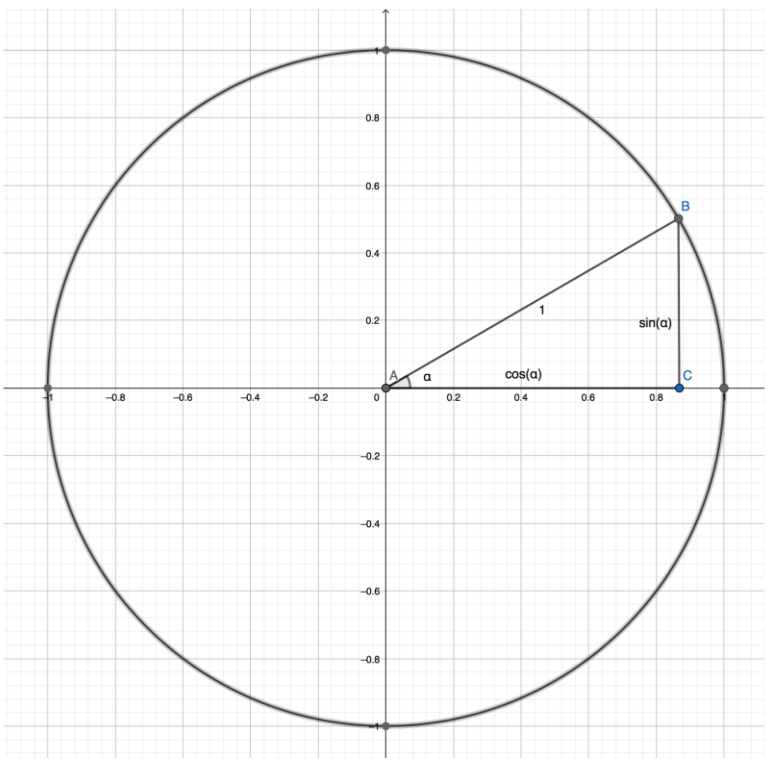
Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

E2.2 Functiebegrip, eenheidscirkel en graden/radialen

In de vorige sectie hebben wij gezien dat de grootte van de hoek in sinus α de uitkomst bepaalt. Dus, kunnen wij zeggen dat f(α) = sin α . Dus, α is de variabele.

Hoewel er steeds voor de sinus voorbeelden uitgewerkt zijn geldt dit ook voor de cosinus en tangens. Sinus, cosinus en tangens zijn functies van α, waarbij α een hoek is. In het vervolg zullen we deze functies respectievelijk aanduiden als sin, cos en tan.

Om een rechthoekige driehoek met hypotenusa met lengte 1 kunnen wij een cirkel trekken. Wij noemen dit de eenheidscirkel omdat de straal gelijk is aan 1. Wij zien dat de hoek α in de rechthoekige driehoek correspondeert met de plaats van punt C op de eenheidscirkel.



Figuur 2: eenheidscirkel

In de voorgaande sectie hebben wij gezien dat sin α de overstaande zijde is gedeeld door een de schuine zijde. De schuine zijde is in dit geval 1. Dus, is de overstaande zijde van deze driehoek gelijk aan sin α. Voor cos α geldt dat deze gelijk is aan de aanliggende zijde.

In de driehoek ABC luidt de stelling van Pythagoras: $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ en is C het punt ($\cos\alpha$, $\sin\alpha$). Wij kunnen op deze manier de waarde van $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\tan\alpha$ uitrekenen. Het zijn getallen.

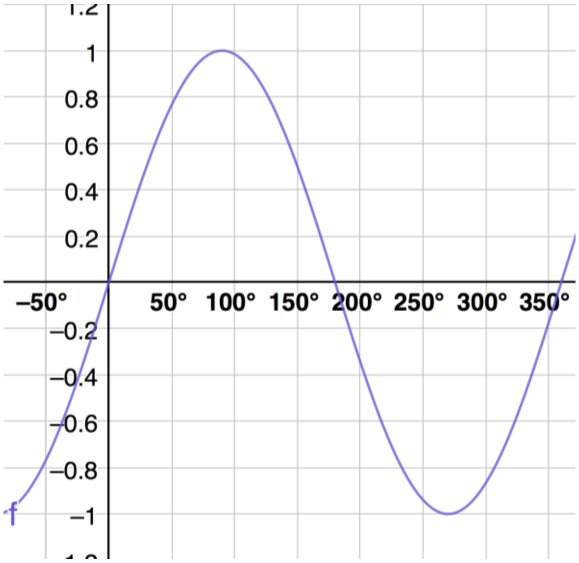
We weten dat $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ en dat is dan hetzelfde als de rico (richtingscoëfficiënt) van de zijde AC.

Uit de eenheidscirkel en door het berekenen van de waarden voor deze functies kunnen wij afleiden dat:

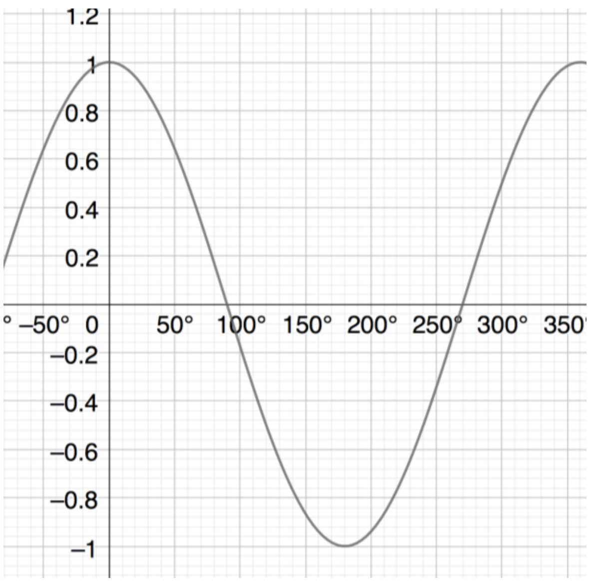
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

Zoals wij gezien hebben bij de eenheidscirkel is de $f(\alpha) = \sin\alpha$ een functie van α. Als we met de hoek de andere kant opgaan (dus, met de klok mee) dan is een $-\sin(\alpha)$ gelijk aan $\sin(-\alpha)$. Voor de $\cos\alpha$ geldt juist dat er niets veranderd $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
De $\tan(-\alpha)$ zorgt ervoor dat de rico negatief wordt. Dus, $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

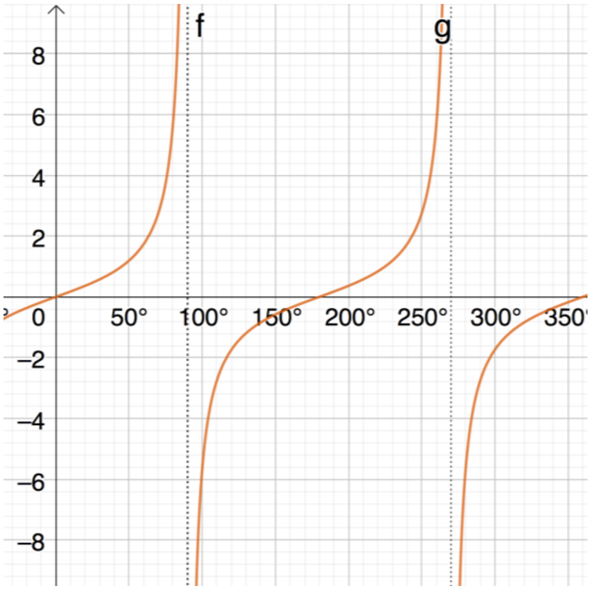
Met de eenheidscirkel kunnen wij ook makkelijk de waarden voor $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\tan\alpha$ uitrekenen voor hoeken die groter zijn 90°. De cirkel is verdeeld in kwadranten. Elke 90° bestrijkt één kwadrant. Hoeken tussen de 90° en 180° zitten in het tweede kwadrant (links boven). Het derde kwadrant bevat hoeken tussen 180° en 270° (links onder). Het laatste; vierde kwadrant bevat hoeken tussen 270° en 360° (rechts onder). Het volgende kan afgeleid worden als wij naar de eenheidscirkel kijken:
0°: sin 0° = 0, cos 0° = 1, tan 0° = 0.
90°: sin 90° = 1, cos 90° = 0, tan 90° bestaat niet.
180°: sin 180° = 0, cos 180° = -1, tan 180° = 0
270°: sin 270° = -1, cos 270° = 0, tan 270° bestaat niet
360°: sin 360° = 0, cos 360° =1, tan 360° = 0



Figuur 3: sin(x) waarbij x in graden



Figuur 4: cos(x) waarbij x in graden



Figuur 5: tan(x) waarbij x in graden

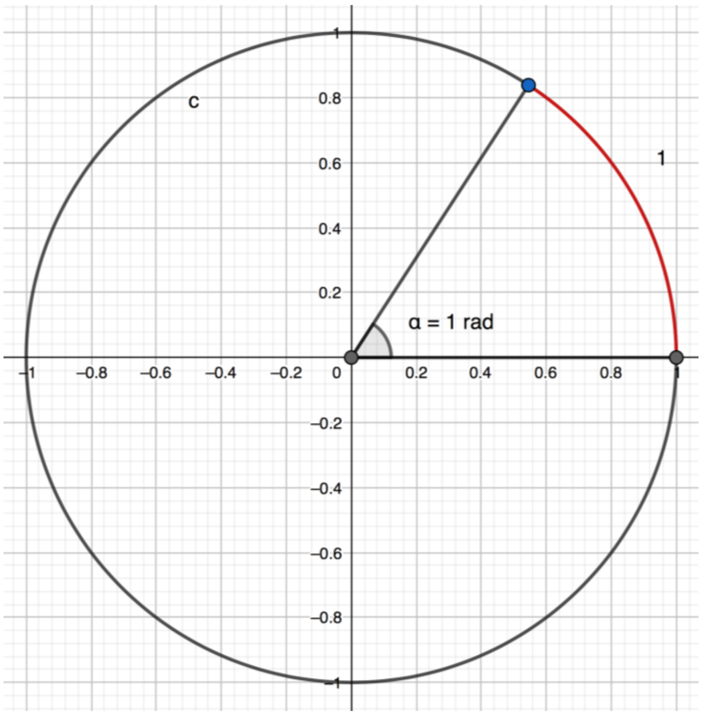
N.B. Dit ziet eruit als een functie. De input ofwel is hier wel een hoek ipv een getal.

Hoeken kun je meten met verschillende eenheden. In de wiskunde en in de techniek wordt bij voorkeur met radialen gewerkt. Het is een andere maat voor het meten van de lengte van de kromming in de eenheidscirkel. Radiaal is een andere eenheidsmaat voor hoeken. Dit is vergelijkbaar met kilometers en mijlen als eenheidsmaten voor afstanden. Het is afhankelijk waar je je op de wereld bevindt of je kilometers of mijlen gaat gebruiken.

Om de nieuwe eenheid radiaal vast te stellen meten wij één eenheid af langs de omtrek van de eenheidscirkel. De hoek die dan ontstaat heeft de grote 1 radiaal. De omtrek van de cirkel is 2π en de binnenhoek is 360° zodat geldt:

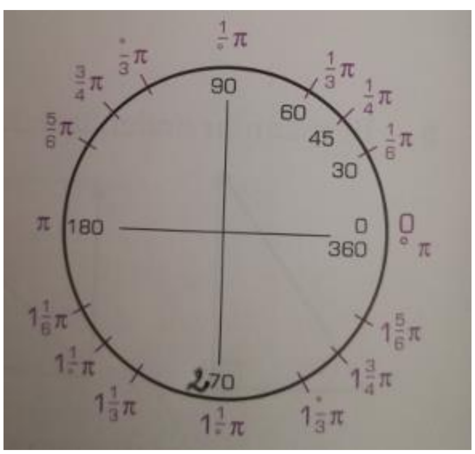
2π rad = 360°
π rad = 180°

1 rad = 180° / $\pi \approx$ 57,1°



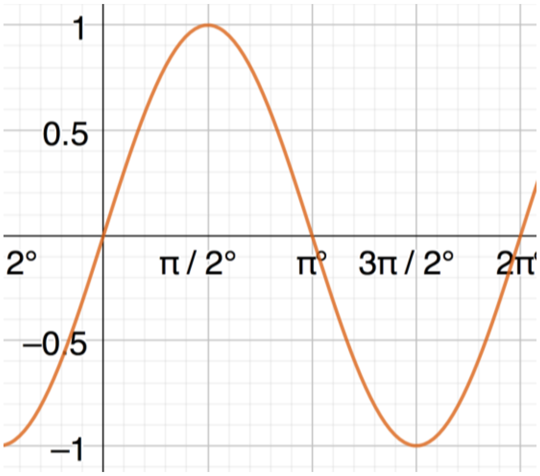
Figuur 6: radialen

$\frac{1}{2}\pi$ is een kwart van de eenheidscirkel en dat is 90°. Het omrekenen van graden naar radialen is weergegeven in de onderstaande cirkel.

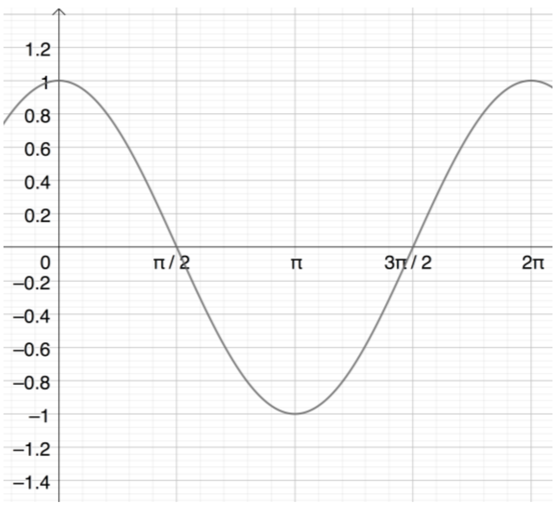


Dus, $\frac{3}{2}\pi$ is driekwart van de eenheidscirkel en dat is 270°

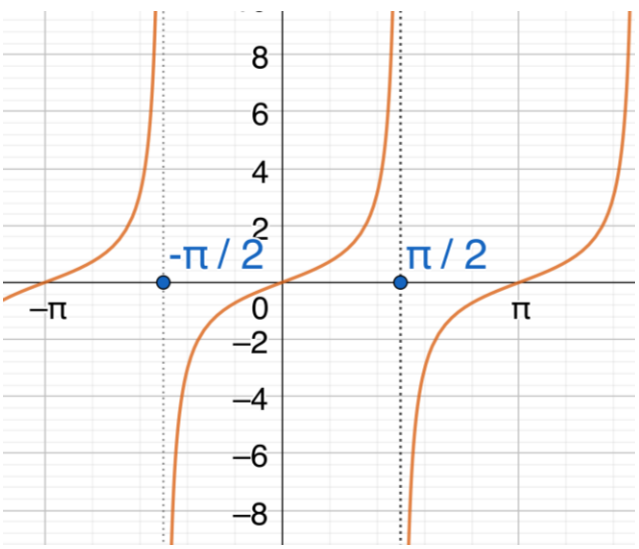
Hieronder staan de grafieken van y = sin x, y = cos x en y = tan x waarbij de hoeken uitgedrukt zijn in radialen.



Figuur 7: sin(x), x in radialen



Figuur 8: cos(x) x in radialen



Figuur 9: tan(x), x in radialen

Opgave E2.2.1

Reken de volgende radialen om naar graden en reken de waarde uit:

a) $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)$

b) $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

c) $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

d) $\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right)$

Opgave E2.2.2

Reken de volgende graden om naar radialen:

a)

α graden	α in radialen
0°	
5°	
10°	
20°	
25°	
37°	
45°	
60°	
90°	

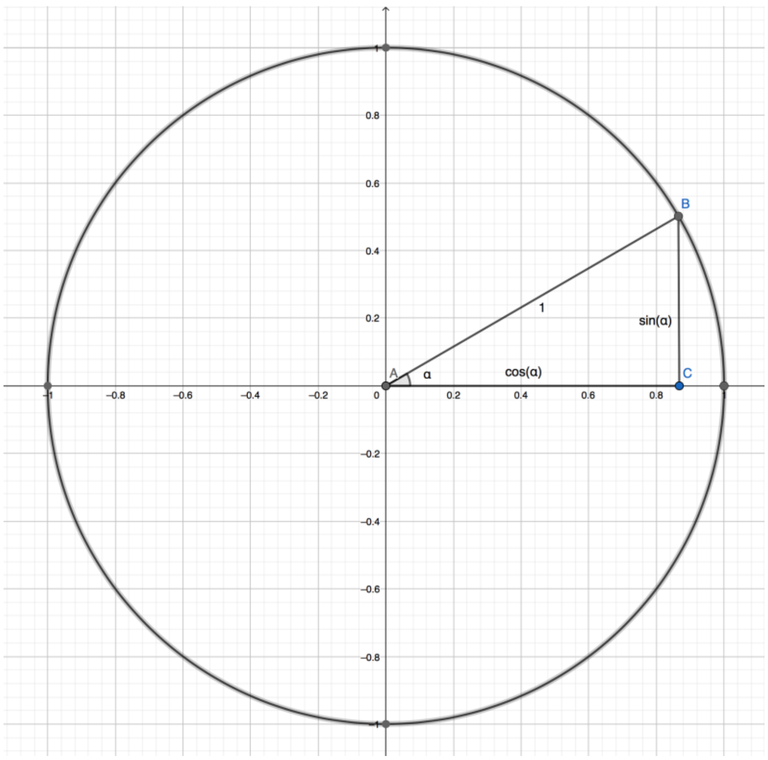
b) sin (90°) = , cos (0°) =

c) sin (60°) = , cos (60°) =

d) tan (60°) = , tan(30°)

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

E2.3. Manipuleren van functies



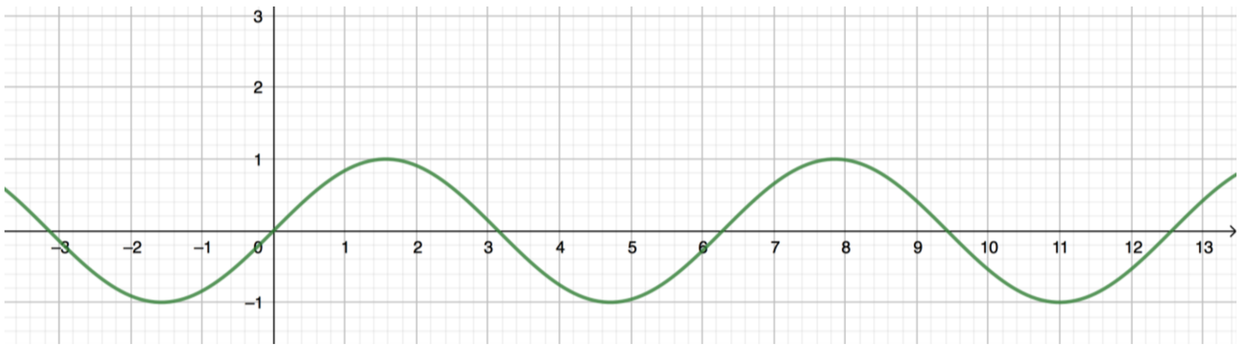
Figuur 10: eenheidscirkel

Voor de eenheidscirkel (zie: bovenstaand plaatje) geldt dat de hoek tussen AC en AB wijzigt als je bij α nog 2π optelt of er 2π van aftrekt. Ondanks de wijziging van de hoek blijft punt B op dezelfde plek op de eenheidscirkel. Dit betekent dat voor tan x geldt dat de waarde niet verandert als je bij x nog 2π optelt of 2π aftrekt. Hetzelfde geldt voor de sin x en de cos x. Dit kan worden samengevat worden in de volgende regels:

$\sin(x + k^* 2\pi) = \sin(x)$
$\cos(x + k^* 2\pi) = \cos(x)$
$\tan(x + k^* 2\pi) = \tan(x)$

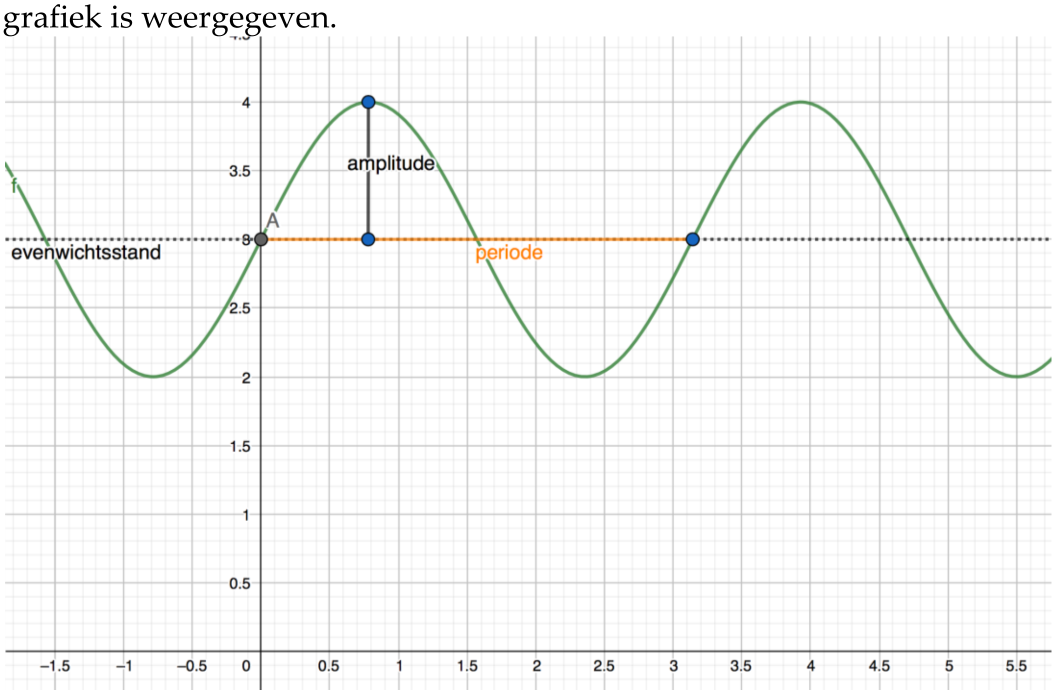
Net zoals bij andere functies kunnen wij de goniometrische functies manipuleren.

Hieronder is de grafiek van f(x) = sin(x) getoond.



Figuur 11: f(x) = sin(x)

Als we de grafiek van y = sin (x) horizontaal met een factor 2 in elkaar duwen krijgen wij y = sin 2x. Schuiven deze functie ook nog 3 naar boven dan slingert hij rond y = 3, dat de evenwichtsstand. Wij krijgen dan de functie y = 3 + sin 2x die in de volgende grafiek is weergegeven.



Figuur 12: f=sin(2x)+3

De maximale afwijking vanaf de evenwichtsstand heet de amplitude en die is hier 1 net zoals bij originele sinus (eenheidscirkel). De periode T is de tijd die nodig is; uitgedrukt met de x waarde, voor een volledige trilling (een heel rondje rond de eenheidscirkel). Voor deze functie is dat π omdat we hem 2 in elkaar hebben geschoven.

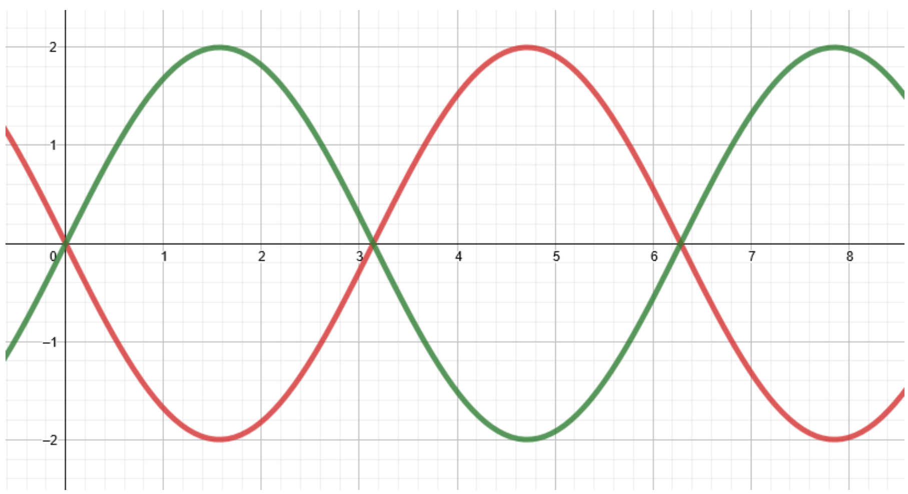
De frequentie is het aantal trillingen per tijdseenheid. f = 1/T dus 1/ π.

Voor het opschrijven van goniometrische functies die verschoven zijn of waarvan de amplitude of frequentie anders is dan de standaard goniometrische functie kunnen wij de volgende formule gebruiken:

$y = a + b \sin(c(x + d))$.

waarbij:

- a de evenwichtstand is;
- b, weergeeft hoeveel de functie verticaal uitgerekt is. Oftewel: b weergeeft hoeveel de grafiek omhoog of omlaag gaat vanaf de evenwichtsstand tot de top/dal. Of b positief of negatief afhangt, van het feit of de grafiek gespiegeld is ten opzichte van de functie f(x) = sin(x).
  - Bij de grafiek f(x) = 2**sin(x)** (groene lijn hieronder), zie je dat de grafiek is uitgerekt (amplitude is 2 i.p.v. 1) en stijgt vanaf het beginpunt (0,0).
  - Bij de grafiek g(x) = **-2sin(x)** (rode lijn hieronder), zie je dat de grafiek is uitgerekt (amplitude is 2 i.p.v. 1) en daalt vanaf het beginpunt (0,0). Oftewel: De grafiek van 2sin(x) is gespiegeld, met als resultaat -2sin(x).



Figuur 13: f(x) = 2sin(x) in rood en g(x) = -2sin(x) in groen

- De amplitude is |b|. Let op: b is dus iets anders dan de amplitude. De amplitude is de absolute waarde en dus altijd positief en b kan positief of negatief zijn.
- 2π/c is de periode.
- De d bepaald hoeveel de functie naar links is geschoven.
- Zoals in het voorbeeld hierboven is de c (=2) hoeveel de functie horizontaal is samengedrukt en de a (=3) hoeveel hij omhoog is gegaan.

Dus, het verschuiven en uitrekken van een goniometrische functie gebeurt hetzelfde als bij alle andere functies, bijvoorbeeld parabolen. Hier heb je al kennis mee gemaakt in module C2.

Opgave E2.3.

Geef van de grafieken van de onderstaande functies de evenwichtsstand, amplitude, frequentie, periode en horizontale verplaatsing t.o.v. sin (x) of cos (x) .

a) $y = 1 + \sin(x)$

b) $y = 3\cos(\pi x)$

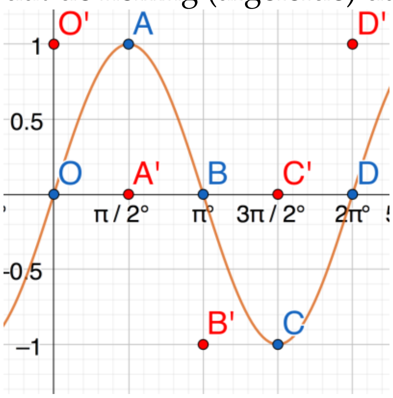
c) $y = 2 - 4\sin(x - 3)$

d) $y = 3 + \cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)$

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

E2.4. Differentiëren van goniometrische functies

In figuur 14 staat het plaatje van de sinus; de stippen geven de waarden van de helling aan in de punten O, A, B, C en D. Uit de symmetrie van de sinusgolf volgt logischerwijs dat de helling (afgeleide) daar achtereenvolgens 1, 0, -1, 0 en weer 1 is.



Figuur 14: afgeleide sin(x) in rood

De richtingscoëfficiënt in de punten A en C is 0. In de punt die door de oorsprong gaat is de rc = 1. De punten die rood zijn stellen eigenlijk de afgeleide van de sinusfunctie voor. Dus, eigenlijk neemt de afgeleide van sin(x) de waarden van de functie cos(x)).

f'(x) = cos (x)

Nu kun je begrijpen, dat de afgeleide functie van de sinus juist de cosinus is!
Helaas is de afgeleide van de cosinus ***niet*** de sinus, zoals je zou denken, maar het tegengestelde daarvan. De afgeleide van cos(x) is – sin(x) (zie: plaatje).

Regels:

y = sin x ⇒ y ' = cos x
y = cos x ⇒ y ' = – sin x mits x in radialen is.

Voorbeeld: de regel voor de tangens kunnen wij heel makkelijk afleiden met de quotientregel:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{cosx\ cosx - sinx\ (-\sin x)}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

Opgave E2.4

Differentieer de volgende functies:

a) y = $x \cdot \sin x$

b) y = $(2x + 1) \cdot \cos x$

c) y = $\frac{4}{x^2} - 4\cos x$

d) y = $\sin(3x)$

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

Antwoorden van de opgaven

Opgave E2.1.1.

Van de rechthoekige driehoek ABC is β de rechte hoek. De hoek α is de hoek bij de punt A . Bereken de zijden van de driehoek ABC met de gegevens:

a) $\alpha = 60°$, a = 5
b= 5,8 c= 2,9

b) $\alpha = 32°$, b= 8
a = 4,2, c = 6,8

c) $\gamma = 67°$, c = 8
a = 3,4, b = 8,7

d) $\gamma = 63°$, a = 9
c = 17,7, b = 19,8

Opgave E2.1.2.

Van de rechthoekige driehoek ABC is β de rechte hoek. De hoek α is de hoek bij de punt A . Bereken hoek α van de driehoek ABC met de gegevens:

a) b = 33, c = 13
$\alpha = 36°$

b) a = 7, c = 10
$\alpha = 35°$

c) b = 16, c = 13
$\alpha = 36°$

d) a = 5, b = 8
$\alpha = 39°$

Opgave E2.2.1

Reken de volgende radialen om naar graden en reken de waarde uit:

b) sin ($\frac{1}{4}\pi$) = sin 45° = 0,71

b) cos ($\frac{3}{4}\pi$) = cos 135° = - cos 45° = -0,70

c) sin ($\frac{1}{2}\pi$) = sin 90° = 1

d) tan ($\frac{1}{3}\pi$) = tan 60° = 1,73

Opgave E2.2.2

Reken de volgende graden om naar radialen:

a)

α graden	α in radialen
0°	0
5°	0,09
10°	0,17
20°	0,35
25°	0,44
37°	0,65
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$

c) sin (90°) = 1 , cos (0°) = 0

d) sin (60°) = √3/2 , cos (60°) = 1/2

d) tan (60°) = √3 , tan(30°) = sin 30° / cos 30° = (½)/ √3/2

Opgave E2.3.

Geef van de grafieken van de onderstaande functies de evenwichtsstand (evst), amplitude(amp), frequentie(f), periode(T) en horizontale verplaatsing(h.v.) t.o.v. sin x of cos x .

a) y = 1 + sin x
evst = 1
amp = 1
f = ½ π
T = 2 π
h.v. = 0

b) y = 3 cos πx
evst = 0
amp = 3
f = 1/2
T = 2
h.v. = 0

c) y = 2 – 4 sin (x – 3)
evst = 2
amp = 4
f = 1/ 2 π
T = 2 π
h.v. = -3

d) y = 3 + cos ($\frac{1}{2}\pi + x$)
evst = 3
amp = 1
f = 1/ 2 π
T = 2 π
h.v. = $\pi/2$

Opgave E2.4

Differentieer de volgende functies:

a) $y = x \cdot \sin x$ $\quad y' = 1 \cdot \sin x + - x \cdot \cos x = \sin x - x\cos x$

b) y = $(2x + 1) \cdot \cos x$ $\quad y' = 2\cos x - (2x+1)\sin x$

c) y = $\frac{4}{x^2} - 4\cos x$ $\quad y' = -\frac{8}{x^3} + 4\sin x$

d) y = $\sin(3x)$ $\quad y' = 3\cos(3x)$