Essential Skills Mathematics

Modulewijzer

Module E1

Logaritmische en exponentiële functies

Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben moet je:

- Weten wat een logaritme is, voorbeelden van logaritmen kunnen benoemen, basiseigenschappen van logaritmen begrijpen en gebruiken en logaritmische vergelijkingen kunnen oplossen
- Begrijpen wat een exponentële functie is en exponentiële vergelijkingen kunnen oplossen
- Begrijpen wat een logaritmische functie is en weten welke grafiek bij een gegeven logaritmische of exponentiële functie hoort.
- Een logaritmische en exponentiële functie kunnen differentiëren

Onderwerpen

E1.1 . Introductie van logaritmen, voorbeelden en eigenschappen
E1.2. De exponentiële functie en vergelijkingen oplossen
E1.3. Grafieken van logaritmische en exponentiële functies
E1.4. De afgeleide van logaritmische en exponentiële functies
Antwoorden van de opgaven

Boek

Je kunt gebruikmaken van het volgende boek als aanvullend materiaal:
Basisvaardigheden Wiskunde HTO / 4e druk. ISBN: 978-90-01-57517-5

In de tabel hieronder is aangegeven welke paragrafen in het boek overeenkomen met de verschillende paragrafen van deze studiewijzer.

Paragraaf studiewijzer	**Paragraaf / pagina boek**
E1.1. Introductie van logartimen	§10.4 – 10.5 / p.94-96
E1.2. Exponentiele vergelijking oplossen	§10.2 / p.90
E1.3. Grafieken van logaritmische en exponentiële functies	§10.1 – 10.3 / p.88- 92
E1.4. Afgeleide van logaritmische en exponentiële functies	§12.3 / p.120

E1.1. Introductie van logaritmen, voorbeelden en eigenschappen

E1.1.1. Voorkennis en introductie

Alvorens een precieze definitie van de logaritme te geven, is het nuttig om de kennis van ***machten*** uit module A enigszins op te frissen. Stel je hebt te maken met een berekening met daarin de term of factor 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2. Dus 2 wordt 15 keer met zichzelf vermenigvuldigd. Je hebt geleerd dat deze vermenigvuldiging korter en simpeler genoteerd kan worden, namelijk:

$$2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^{15}$$

- 2^{15} spreek je uit als 2 tot de macht 15.
- De uitdrukking 2^{15} als geheel noemt men een ***macht***, 2 noemt men het ***grondtal*** van de macht en 15 wordt de ***exponent*** van de macht genoemd.
- Het grondtal is altijd groter dan 0 en ongelijk aan 1.

Een macht zou je eigenlijk een afkorting, een *verkorte schrijfwijze* kunnen noemen. Dit biedt grote voordelen: berekeningen, bijvoorbeeld in de astronomie, de kernfysica en nanotechnologie met zeer kleine en zeer grote getallen kunnen sneller en accurater worden uitgevoerd.

Door deze notatieafspraak, kom je tot de volgende eigenschappen van machten:

2^{10} = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = (2.2.2.2) x (2.2.2.2.2.2) = $2^4 \times 2^6$. Dus : $2^4 . 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$.

We zien dat bij het *vermenigvuldigen* van machten met een gelijk grondtal, je de exponenten kunt *optellen*.

De algemene regel is:	$\boldsymbol{a^p . a^q = a^{p+q}}$	**(1)**

Maar ook:

$(2^3)^4 = (2.2.2)^4 = (2.2.2) \times (2.2.2) \times (2.2.2) \times (2.2.2) = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^{12}$

Je mag dus bij een macht van een macht de exponenten *vermenigvuldigen*.

De algemene regel is: $(a^p)^q = a^{p.q}$ **(2)**

Een andere eigenschap is de volgende: $\frac{2^9}{2^6} = \frac{2^6 \,.\, 2^3}{2^6 \,.\, 1} = \frac{2^6}{2^6} \,.\, \frac{2^3}{1} = 1.\, 2^3 = \mathbf{2^3} = \mathbf{2^{9-6}}$
Bij het delen van machten, wordt de exponent van de macht in de noemer afgetrokken van de exponent van de macht in de teller.

De algemene regel is: $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ **(3)**

Uit bovenstaande regels kunnen we heel gemakkelijk onderstaande regels afleiden.

Het volgende $2^0 = 1$, want $2^0 = 2^{4-4} = \frac{2^4}{2^4} = 1$

De algemene regel is: $a^0 = 1$ **(4)**

Ook zien we dat $\frac{1}{2^5} = \frac{2^0}{2^5} = 2^{0-5} = 2^{-5}$

De algemene regel is: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ **(5)**

We noemen deze exponenten *oneigenlijk*, omdat je een getal natuurlijk niet -2 keer met zichzelf kunt vermenigvuldigen. De besproken regels gelden ook voor gebroken exponenten en hebben enorme rekenkundige voordelen. We zullen dit zien bij het gebruik van logaritmen.

Voor machten met gebroken exponenten geldt bovendien het volgende:

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$	**(6)**
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	**(7)**

Immers: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$

Voorbeeld: $\sqrt[8]{3^4} = 3^{\frac{4}{8}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Opgave E1.1.1.

a) Schrijf als een macht: 4.4.4.4.4.4

b) Schrijf als een macht: 7.7.7.7.7.7.7.3.3.3.3.3.3.3.3

c) Bereken de onbekende x uit: $2^3.2^5.2^{11} = 2^x$

d) Indien $3^5 = 3^x.3^y$, welke waarden kunnen x en y dan aannemen?

We gaan nu bij onderstaande voorbeelden bekijken of we een getal als een macht kunnen schrijven met een van tevoren bepaald grondtal, dus de bijbehorende exponent zoeken.

Voorbeelden

(a) Kunnen we 8 als macht schrijven met grondtal 2 en welke exponent hoort daar bij?

Oftewel: $2^? = 8$. Het antwoord is 3, want $2^3 = 2.\ 2.\ 2 = 8$

(b) $2^? = \sqrt{2}$ Het antwoord is ½ , want $2^{1/2} = \sqrt{2}$ (dit is regel (6))

(c) $2^? = \frac{1}{4}$ Het antwoord is -2, want $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$ (dit is regel (5))

(d) $3^? = \frac{1}{27}$ Het antwoord is -3, want $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$ (dit is regel (5))

(e) $3^? = \sqrt[5]{3}$ Het antwoord is $\frac{1}{5}$, want $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ (dit is regel (7))

Je zoekt in deze voorbeelden de exponent, dus tot welke macht je het grondtal moet verheffen om het gevraagde getal te krijgen.

Bij (a) moet je zoeken tot welke macht je 2 moet verheffen om 8 te krijgen.
Voor deze opdracht bestaat de notatie $\log_2 8$ (ook wel ${}^2\log 8$). Spreek uit 2 log 8.

Laten w**e** de uitdrukking $\log_2 8$ nader onder de loep nemen:

- De notatie log komt van **logaritme**
- In $\log_2 8$ noemen we 2 het grondtal van de logaritme
- $\log_2 8$ is de exponent van het grondtal 2 waarmee de macht gelijk is aan 8

  Deze exponent is 3 (want $2^3 = 8$) dus $\log_2 8 = 3$

Bij de andere voorbeelden is dus:

$\log_2 \sqrt{2} = ½$ (voorbeeld (b))

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$ (voorbeeld (c))

$\log_3 \frac{1}{27} = -3$ (voorbeeld (d))

$\log_3 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5}$ (voorbeeld (e))

De definitie van een *logaritme* is dus:

De logaritme $\log_g x$ is de macht waartoe je het positief getal g moet verheffen om het positief getal x te verkrijgen.
Dus: $g^{\log_g x} = x$

Voorbeeld

$\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4$

Dus de het nemen van de logaritme is de inverse bewerking van tot de exponent doen, je kunt ze als het ware tegen elkaar wegstrepen:

- $\log_g(g^a) = a$
- $g^{\log_g x} = x$

Ook geldt dat:
Als: $\log_g(x) = y$ dan: $g^y = x$

Er zijn veel praktijkvoorbeelden waarbij logaritmen gebruikt worden.

Voorbeeld

Een kapitaal krijgt een jaarlijkse rente van 5%. Na hoeveel jaar is het kapitaal verdubbeld?

Noem het startkapitaal K. Na 1 jaar is het rentebedrag dus 5% van K oftewel $\frac{5}{100}^{e}$ deel van K.

Het rentebedrag is dus: $\frac{5}{100}K$

Het nieuwe bedrag plus rente is: $K + \frac{5}{100}K = K(1+\frac{5}{100})$

Voor het tweede jaar berekenen we rente over het nieuwe bedrag $K(1+\frac{5}{100})$

Het rentebedrag in het tweede jaar is dan $\frac{5}{100} \cdot K(1+\frac{5}{100})$

Het nieuwe bedrag na het tweede jaar is dan:

$$K(1+\frac{5}{100}) + \frac{5}{100} \cdot K(1+\frac{5}{100}) = K(1+\frac{5}{100})(1+\frac{5}{100})$$

$$= K(1+\frac{5}{100})^2$$

schrijf $K(1+\frac{5}{100})$ *als a*
Dan staat er:
$K(1+\frac{5}{100}) + \frac{5}{100} \cdot K(1+\frac{5}{100}) =$

$= a+\frac{5}{100}.a = a(1+\frac{5}{100})$, *a buiten haakjes halen,*

zie module A en B

Als we deze berekening herhalen, dan zien we dat na x jaar is het nieuwe kapitaalbedrag te schrijven is als:

$$K(1+\frac{5}{100})^x$$

De vraag is na hoeveel jaar het beginkapitaal K verdubbeld is?
Welke x maakt de volgende vergelijking kloppend:

$$K(1+\frac{5}{100})^x = 2K$$

Delen door K geeft:

$$(1+\frac{5}{100})^x = 2.$$

$$(1.05)^x = 2$$

$$x = \log_{1.05} 2$$

Zonder de kennis van logaritmen kun je alleen een x-waarde proberen. Als deze waarde te hoog blijkt te zijn, probeer je een iets kleinere x-waarde. Als deze dan te klein blijkt te zijn, neem je weer een grotere x, enz. Een tijdrovend proces. Met de ontdekking van logaritmen is dit niet meer nodig.

De Schotse burchtheer John Napier (1550-1617) heeft aan de wieg van de logaritmen gestaan. Hij begon met de constructie van een logaritmentafel die door Henry Briggs werd geperfectioneerd. In 1633 publiceerde Henry Gellibrand in het werk "Trigonome-trica Brittannica" de logaritmen van de getallen 1 t/m 100000. Een Sisyphus arbeid. Later werden gelukkig reeksontwikkelingen voor de logaritmen ontdekt waardoor de berekeningen enorm vereenvoudigd werden. Tegenwoordig gebruiken we een rekenmachine om logaritmen uit te rekenen.
Logaritmen betekenen dus vooral *een enorme reductie van rekenwerk*. Verder heeft de logaritme als prettige eigenschap dat vermenigvuldigen teruggebracht wordt tot optellen, iets waar vroegere sterrenkundigen, die met zeer grote getallen werkten, dankbaar gebruik van maakten.

E1.1.2. Voorkennis van diverse logaritmen

<u>Voorbeeld 1</u> : $2^x = 3$

Nu is x dus een logaritme: $x = \log_2 3$

Wellicht ten overvloede: $x = \log_2 3$ is een *verkorte notatie* voor de volgende zin: *"als je het getal 2 tot de macht x verheft, dan krijg je het getal 3"*.

We kunnen x gemakkelijk met de rekenmachine berekenen, want het is dus gewoon een getal. Voordat dat gedaan wordt, moet eerst uitgelegd worden hoe je bij logaritmen van grondtal kunt veranderen. Verder op komt dit aan bod.

<u>Voorbeeld 2 :</u> $10^y = 2$.

Nu is y een logaritme: $y = \log_{10} 2$.

Met de rekenmachine vinden we x = 0.30103 (op 5 decimalen nauwkeurig).

Het is van belang te weten dat, als het grondtal van de logaritme 10 is, dit grondtal dan vaak niet genoteerd wordt, dus :

$$y = \log_{10} 2 = \log 2$$

Dit weglaten van het grondtal gebeurt alleen als het grondtal 10 is.

En nog iets: als je in voorbeeld 1 $\log_2 3$ invult in $2^x = 3$, dan ontstaat de formule :

$$\boxed{2^{\log_2 3} = 3}$$

Er is niets geheimzinnigs aan deze vergelijking. De logaritme en het machtsverheffen heffen elkaar op, het zijn elkaars inverses.

Er is ook een logaritme die als grondtal het getal e heeft. Het irrationale getal e is gelijk aan:

$$e = 2.718281828 \ldots.$$

Dit getal e is ontdekt door de bekende Zwitserse wiskundige Euler (vandaar de e als notatie). Het speelt een belangrijke rol in de wiskunde, verderop wordt uitgelegd, waarom dit zo een belangrijk getal is.

Enkele voorbeelden: $e^x = 3$, dus $x = \log_e 3$ en $e^y = 234$, dus $y = \log_e 234$.

De logaritme met grondtal e heeft vanwege zijn bijzondere eigenschappen een *aparte notatie* gekregen :

$$x = \log_e 3 = \ln 3 \quad \text{en} \quad y = \log_e 234 = \ln 234 \,.$$

De notatie ln is een afkorting van *logaritm natural.* Dit type logaritmen worden *natuurlijke logaritmen* genoemd.

<u>Voorbeeld 3</u> : $10^{\log_{10} 2}$

In dit voorbeeld stelt $\log_{10} 2$ de macht voor, waartoe je 10 moet verheffen om 2 te verkrijgen. Verhef je dus 10 tot de macht $\log_{10} 2$, dan krijg je 2 .

<u>Voorbeeld 4</u> : $4^{\log_4 9}$

Er komt 9 uit, want $\log_4 9$ is de macht waartoe je 4 moet verheffen om 9 te krijgen, het machtsverheffen en de logaritme heffen elkaar op.

<u>Voorbeeld 5</u> : $10^{-\log 3}$

We zien een minteken en een log zonder grondtal. Indien geen grondtal gegeven is, dan is het grondtal 10. Het betekenis van het minteken is bekend, het werd geïntroduceerd in module A en hierboven herhaald. We kunnen daarom het volgende schrijven :

$$10^{-\log 3} = 10^{-\log_{10} 3} = \frac{1}{10^{\log_{10} 3}} = \frac{1}{3}$$

<u>Voorbeeld 6</u>:

$e^{\ln 5}$

Zoals vermeld is **ln** een notatie voor de natuurlijke logaritme met grondtal e. Dus in plaats van ln5 kunnen we dan $\log_e 5$ schrijven en we krijgen dan als antwoord:

$e^{\ln 5} = e^{\log_e 5} = 5$

<u>Voorbeeld 7</u>: $10^{2 \log 2}$

We zien geen grondtal, dus het grondtal is 10. Verder staat een 2 in de macht voor de logaritme. Dit leidt tot de onderstaande berekening:

$$10^{2 \log 2} = \left(10^{\log 2}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Want $\log_{10} 2$ is de macht waartoe je 10 moet verheffen teneinde 2 te verkrijgen.

Voorbeeld 8: $e^{-\ln 2}$

$e^{-\ln 2} = \quad e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\log_e 2}} = \frac{1}{2}$

Voorbeeld 9 : $\log_4(3x + 4) = 2$

Hier staat dat $4^2 = 3x + 4$. Dan $16 = 3x + 4$ dus $x = 4$.

Voorbeeld 10 : $\log_3 (4x+3) = -2$

En hier staat: $3^{-2} = 4x + 3$ ofwel $x = - 13/18$.

Opgave E1.1.2.

a. $\log_5 125 = \ldots$
b. $\log_7 49 \ = \ldots$
c. $\log_4 (1/4) = \ldots$
d. $3^x = 5$ (Zie nu voorbeeld 1. Schrijf dan x als x =….)
e. $8^{\log_8 5} =$
f. $e^{\log_e 4} =$
g. $4^{\log_4 e} =$
h. $10^{-\log 4} =$
i. $5^{2^{\log_5 3}} =$
j. $e^{-2\ln 2} =$
k. $\log_2 x = -4$, $x = \ldots.$
l. $\log_3(2x-19) = 4$, $x = \ldots.$
m. $\log_2(3x - 2{,}5) = -1$, $x = \ldots.$;
n. $\ln (2x-4) = 2$, $x = \ldots..$

E1.1.3. Eigenschappen van logaritmen

Er zijn vier uiterst handige rekenregels van logaritmen, die gemakkelijk te bewijzen zijn:

(1)	$\log_g(ab)$	$=$	$\log_g a + \log_g b$
(2)	$\log_g (a/b)$	$=$	$\log_g a - \log_g b$
(3)	$\log_g a^x$	$=$	$x \log_g a$
(4)	$\log_a x$	$=$	$\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Deze regel zegt eigenlijk: Je kunt overstappen op een ander grontal terwijl de uitkomst gelijk blijft.
Hier is overgestapt van grondtal a naar grontal b. Je moet dan de nieuwe logaritme delen door de nieuwe logaritme van het oude grontal. Dit is uiterst handig bij het berekenen van logaritmen op een rekenmachine die alleen grontal 10 hanteert

We bewijzen rekenregel 1. De rest van de regels wordt op soortgelijke wijze bewezen:

$$g^{\log_g a + \log_g b} = g^{\log_g a} \cdot g^{\log_g b} = a{\cdot}b = g^{\log_g (ab)}$$

We hebben dus $g^{\log_g a + \log_g b} = g^{\log_g (ab)}$

We maken hier gebruik van de regel:
Als $g^A = g^B$ *dan volgt dat* **A = B**

Hieruit volgt: $\log_g a + \log_g b = \log_g (ab)$

Als illustratie van bovenstaande 4 regels een paar voorbeelden.

<u>Voorbeeld 11</u>: Bereken $\log_{10} 50 + \log_{10} 20$
Pas nu eigenschap 1 toe.
$\log_{10} 50 + \log_{10} 20 = \log_{10} (50*20) = \log_{10} 1000 = \log 1000 = 3$

<u>Voorbeeld 12:</u> Bereken $\log_{10} 100 - \log_{10} 50$
Pas eigenschap 2 toe.
$\log_{10} 100 - \log_{10} 50 = \log_{10} (100/50) = \log 2 = 0.3010$

<u>Voorbeeld 13:</u> De koopman uit de 17de eeuw, die bij de introductie van exponentiële functies zal optreden, wil nu al vast weten in hoeveel jaar zijn kapitaal van 200000 florijnen zal verdubbelen. Interest is 5 % per jaar. We moeten dan voor hem x oplossen uit de vergelijking (zie voorbeeld uit paragraaf E1.1):
$200000 \,.\, (1.05)^x = 400000$

Ofwel: $(1.05)^x = 2$

Logaritmen tonen hier hun kracht: je “neemt van beide kanten de logaritme”. Dat is een toegestane wiskundige operatie, dat wil zeggen we voegen aan beide kanten, dus vóór (1.05)x en vóór 2 de functie log toe :

$\log(1.05)^x = \log 2$

Eigenlijk beweer je met deze vergelijking dat als $(1.05)^x = 2$, dat dan de macht waartoe je 10 moet verheffen om $(1.05)^x$ te krijgen, gelijk is aan de macht waartoe je 10 moet verheffen om 2 te verkrijgen en dat ligt voor de hand omdat $(1.05)^x$ en 2 aan elkaar gelijk zijn.

Met toepassing van eigenschap 3 gaat deze vergelijking over in: $x\log 1.05 = \log 2$.

Met de rekenmachine vind je: $\log 1.05 = 0.0211893$ en $\log 2 = 0.3010$, en dan $x = 14.2$ jaar.

Voorbeeld 14 Bereken: $\log_5 14$

Op de rekenmachine zit er een log-knop voor logaritmen met grondtal 10 en een ln-knop voor logaritmen met grondtal e. Stel we willen van grondtal 5 naar grondtal 10 gaan, zodat we de log-knop van de rekenmachine kunnen gebruiken. We passen dan eigenschap 4 toe:

$\log_5 14 = \dfrac{\log_{10} 14}{\log_{10} 5} = \dfrac{1.146128}{0.69897} = 1.6397$ op 4 decimalen nauwkeurig.

Opgave E1.1.3.

a. $\log 10 + \log 20 =$

b. $\log_3 3 + \log_3 27$

c. $\log 10000 - \log 10$

d. $\log 10 + \log 11$

e. $\log_{10} 25 = c \,.\, \log_{10} 25$. Bereken c

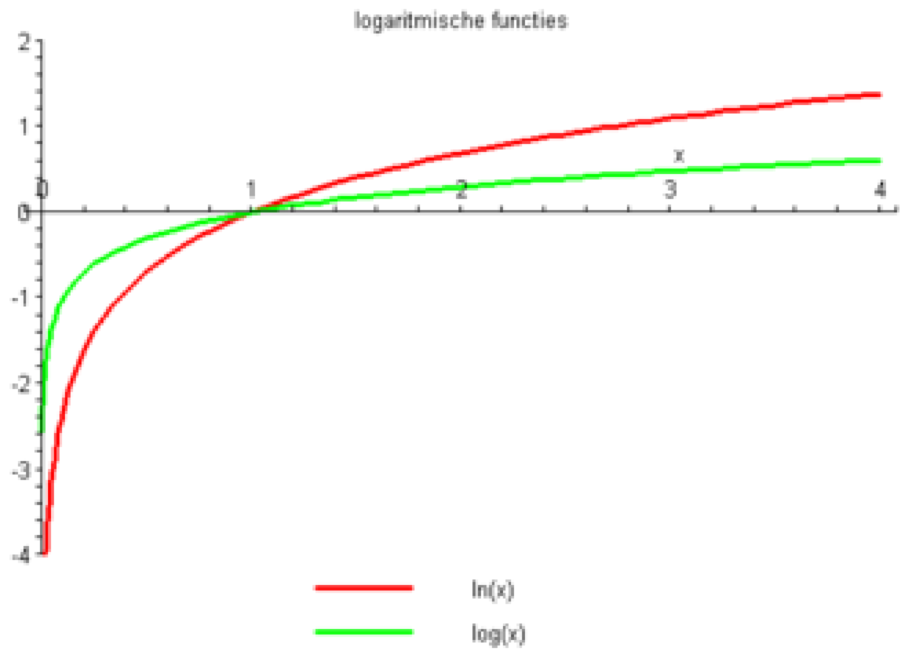
f. Zet log10 om in $\log_5 10$. Wat is de factor tussen log10 en $\log_5 10$?

g. Bereken $\log 1000^5$

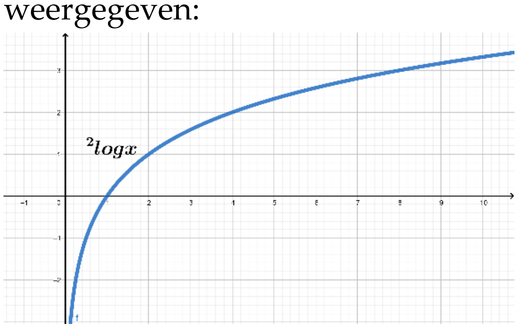
h. Bereken $\log\left(1000^{-1}\right)$

i. Bereken $\ln 10^{20} - \ln 10$.

E1.1.4. De logaritmische functie

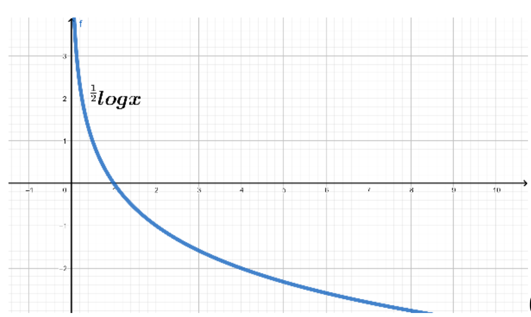


Hierboven zien we de grafiek van de natuurlijke logaritme van x, dus ln(x) of $\log_e x$ (de rode lijn) en ook de grafiek van log(x), ofwel $\log_{10} x$ (de groene lijn).
Alle logaritmische functies $\log_a x$ ($a > 0$ en $a \neq 1$) gaan door het punt P(1,0) op de x-as omdat $a^0 = 1$
We maken een onderscheid tussen de situaties dat het grondtal a >1 is of dat a tussen 0 en 1 ligt. De grafieken van de functies lopen allemaal ongeveer zoals hieronder weergegeven:



a>1

Stijgend



0 <a <1

dalend

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

E1.2. De exponentiële functie en vergelijkingen oplossen

E1.2.1. De exponentiële functie

Er bestaan veel soorten functies. Uit module C2 kennen we:

- lineaire functies, bijvoorbeeld $y = 10x + 4$ of $y = 5x - 5$
- kwadratische functies, bijvoorbeeld $y = 5x^2 + 3x - 3$
- derdegraadsfuncties als $y = 4x^3 + 6x^2 - 9x + 14$

Er bestaan nog veel meer functies, bijvoorbeeld hogeregraadsfuncties en goniometrische functies als sin(x), cos(x), tan(x).
Indien de onbekende x als *exponent* voorkomt, dan heb je te maken met een *exponentiële* functie.

De exponentiële functies verschenen in de loop van de tijd in de wiskunde, en vonden hun praktische toepassing in velerlei gebieden, onder andere in de financiële wereld, nu al weer honderden jaren geleden.

Veronderstel eens dat de eerder genoemde rijke koopman een kapitaal van 200000 florijnen bij een Amsterdamse bank wegzette tegen een interestpercentage van 5% gedurende een looptijd van 7 jaar. Dan was zijn kapitaal na 5 jaar aangegroeid tot het leuke sommetje van:

$200000(1 + 5/100)^7 = 200000 \times 1.416481 = 283296$ florijnen.

Want elk jaar kreeg deze koopman 5% interest op zijn geld, dus elk jaar nam zijn kapitaal met 5% toe. Dus elk jaar werd zijn kapitaal met een factor 1.05 groter (in de financiële wereld wordt deze factor de *groeifactor* genoemd).

Als je nu in plaats van 7 jaar het kapitaal x jaar wegzet, dan ontstaat de formule:

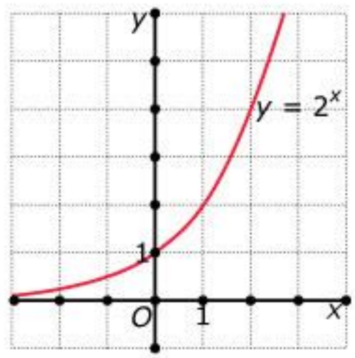
$$\text{Grootte kapitaal na x jaar: } K(x) = 200000.(1.05)^X$$

En hier zien we dan de exponentiële functie $(1.05)^x$ verschijnen: de onbekende x komt als *exponent* in de functie voor. Nemen we nu meer algemeen a in plaats van 1.05 , dan zien we de gebruikelijke, algemene formule voor de exponentiële functie zoals hij in de meeste leerboeken voorkomt:

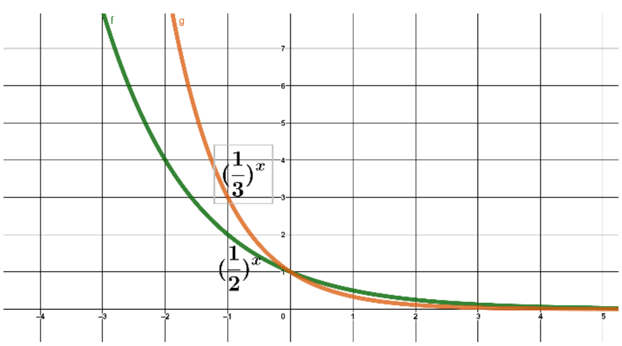
$$\mathbf{f(x) = a^x}$$

In deze formule wordt a het *grondtal* genoemd. Voor a geldt: $a > 0$ en $a \neq 1$.
Alle exponentiële functies van het bovenstaande type gaan door het punt (0,1) op de y-as, omdat $a^0=1$. Ze zijn bovendien positief voor iedere x.

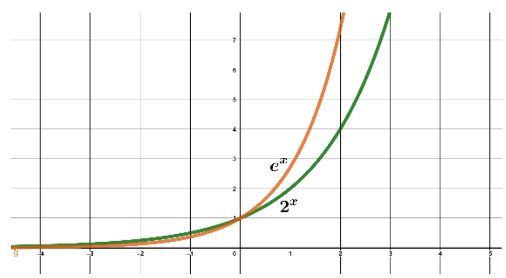
Hieronder de grafiek van de exponentiële functie $y = 2^x$:



Bij exponentiele functies maken we onderscheid tussen de situatie dat het grondtal $a > 1$ of dat a tussen 0 en 1 ligt.
De grafieken van exponentiele functies hebben alle hetzelfde soort verloop, zie hieronder.



0 < a <1 , dalend



a > 1 , stijgend

E1.2.2. Voorbeelden van de exponentiële functie

Overal komen processen voor die een exponentieel karakter vertonen, dus processen die kwantitatief beschreven kunnen worden met een exponentiële functie.
Als we het eerdere voorbeeld uit het vorige hoofdstuk nemen met 200000 florijnen als beginkapitaal en een rentepercentage van 5%. Dan konden we het kapitaal na x jaar uitdrukken als:
$K(x) = 200000.(1.05)^X$

Belangrijk hier om te weten dat bij exponentiële groei de hoeveelheid per tijdseenheid met **hetzelfde getal** vermenigvuldigd wordt, in dit geval 1.05.

In het algemeen is de formule voor exponentiële groei:

- $N = \mathbf{b \cdot g^t}$
- N: hoeveelheid of waarde op tijdstip t
- b: beginhoeveelheid of beginwaarde
- g: groeifactor per tijdseenheid
- t: tijd

Als $g<1$ dan heb je te maken met exponentiële afname.

In de praktijk spreekt men vaak over verdubbelingstijden (voorbeeld van het kapitaal) of halveringstijden (radioactief afval).

Voorbeelden
Zonnebloemen in Zuid-Frankrijk in de Provence, die Vincent van Gogh schilderde, vertonen in het begin van hun prille bestaan een groeipatroon dat beschreven kan worden door een exponentiële functie.

Kweken van bacteriën. De verdubbeling van het aantal bacteriën vindt in een vast tijdsinterval plaats, bijvoorbeeld in elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, een voorbeeld van exponentiële groei.

Bij radioactiviteit, waarbij bijvoorbeeld uraniumatomen uiteindelijk vervallen tot loodatomen, is het aantal atomen dat vervalt op elk moment evenredig met het aantal nog niet vervallen atomen. Dat betekent dat ook hier een exponentiële functie om de hoek komt kijken teneinde dit verval te beschrijven.

Hoe verder je je verwijdert van een snelweg, hoe minder last je hebt van het geraas van het verkeer. De intensiteit van de geluidsoverlast die je ondervindt als gevolg van de snelweg is weer te beschrijven met een exponentiële functie met de afstand tot de snelweg als variabele.

Bij controlemetingen van de ademhaling van mensen wordt gevraagd om zo diep mogelijk uit te ademen en vervolgens gedurende 5 seconden zo diep mogelijk in te ademen. Tijdens het inademen is de hoeveelheid verse lucht in de longen een exponentiële functie van de tijd. Bij astmapatiënten is de maximale hoeveelheid lucht in de longen kleiner en duurt het langer voordat het maximum bereikt wordt.

E1.2.3. Exponentiële vergelijkingen oplossen

<u>Voorbeeld 1:</u> $3^x = 3$
Hier is de exponent x meteen te bepalen: $x = 1$ want $3^1 = 3$

<u>Voorbeeld 2:</u> $2^x = 4$
Omdat 2 maal 2, dus 2^2, gelijk is aan 4 geldt $x = 2$

<u>Voorbeeld 3:</u> $3^x = 1$
Uit module A weten we dat ieder getal (behalve het getal 0) tot de macht nul is gelijk aan 1, dus $x = 0$ is de gezochte oplossing.

<u>Voorbeeld 4</u>: $(1/3)^x = (1/9)$
Omdat $1/3 = 3^{-1}$ en $1/9 = 1/3^2 = 3^{-2}$ geldt: $(3^{-1})^x = 3^{-2}$ en $3^{-x} = 3^{-2}$ dus $-x = -2$, ofwel $x = 2$

<u>Voorbeeld 5:</u> $(1/2)^x = 2$. Schrijf je ½ als 2^{-1} dan krijgen we : $(2^{-1})^x = 2 = 2^1$. Dan:
$(2^{-1})^x = 2^{-x}$ en $2^{-x} = 2^1$. Dus $-x = 1$, ofwel $x = -1$

<u>Voorbeeld 6</u>: $10^x = 4$
Als x nul is, dan krijgen we links: 10^0 en dat is 1. En als we x=1 nemen, dan is $10^1 = 10$.
Daaruit volgt dat x tussen de 0 en 1 moet liggen.
We berekenen nu x door links en rechts "de logaritme te nemen", we nemen de logaritme van 10x en van 4:

$$\log 10^x = \log 4$$

Nu geldt: $\log 10^x = x\log 10 = x$, omdat $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$.
Het antwoord wordt: $x = \log 4 = {}^{10}\log 4 = 0.60206$.

<u>Voorbeeld 7</u>: $(1/3)^x = 9$
Eerste manier: $(1/3)^x = (3^{-1})^x = 3^{-x} = 9 = 3^2$ Dan wordt $-x = 2$ en $x = -2$
Tweede manier (links en rechts de logaritme te nemen):
$\log(1/3)^x = \log 9$ dus $x\log(1/3) = \log 9$
omdat $\log(1/3) = \log 3^{-1} = -\log 3$ geldt:
$x = \log 9/(\log(1/3)) = \log 9/(-\log 3) = \log 3^2/(-\log 3) = -2\log 3/\log 3 = -2$

Voorbeeld 8: $10^x = 12$

Nu geldt volgens de definitie: $x = {}^{10}\log 12 = 1.079181$

Je kunt ook weer links en rechts de logaritme nemen. Je krijgt dan:

$\log 10^x = \log 12$, dus $x\log 10 = \log 12$ en omdat $\log 10 = 1$, geld weer $x = \log 12 = {}^{10}\log 12 = 1.079181$

Voorbeeld 9: $2^x = 3$

Dus: $x = \log_2 3$

We kunnen x berekenen met behulp van de rekenmachine door te veranderen van grondtal naar het grondtal e of het grondtal 10. Kiezen we voor een verandering van grondtal 2 naar grondtal e, dan gebruiken we eigenschap 4 van de logaritmen:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

dan: $\log_2 3 = \dfrac{\log_e 3}{\log_e 2} = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} = \dfrac{1.09861}{0.693147} = 1.58496$

Voorbeeld 10: $10^y = 2$

Dan: $y = \log_{10} 2 = \log 2 = 0.30103$

Voorbeeld 11: $5^x = 19$

Neem links en rechts de logaritme: $\log 5^x = \log 19$

Dan: $x\log 5 = \log 19$ ofwel $x = \dfrac{\log 19}{\log 5} = \dfrac{1.2788}{0.69897} = 1.82955$

Voorbeeld 12: $(1/7)^x = 17$

$(1/7)^x = (7^{-1})^x = 7^{-x} = 17$

We nemen de logaritme : $\log 7^{-x} = \log 17$

$-x\log 7 = \log 17$ ofwel $x = -\dfrac{\log 17}{\log 7} = -1.456$

Opgave E1.2.3.

- **a.** Bereken x uit $3^x = 9$.
- **b.** Bereken x uit $(1/4)^x = 1/4096$
- **c.** Bereken x uit $2^x = 7$.
- **d.** Bereken x uit $(1/5)^x = 10$.
- **e.** Bereken x uit $(1/7)^x = 17$.
- **f.** Bereken x uit $(1/5)^{-x} = 3125$
- **g.** Bereken x uit $(1/4)^x(1/2)^{2x} = 512$

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

E1.3. Grafieken van logaritmische en exponentiële functies herkennen

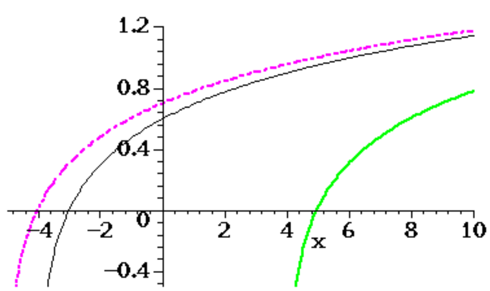
E1.3.1. Grafieken van logaritmische functies

In module C2 heb je geleerd om grafieken en formules te transformeren door ze naar links, rechts, boven en beneden te verplaatsen en ze ten opzichte van assen te vermenigvuldigen. Uiteraard kan die ook met exponentiële en logaritmische functies.

Logaritmische functies.

<u>Voorbeeld 1:</u>

Gegeven is de functie $f(x) = \text{'}\log_{10}(x-4)\text{'}$ met daarbij de volgende drie grafieken:



Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- De gestippelde roze
- De vette groene
- De dunne zwarte

Allereerst een inleidende opmerking :

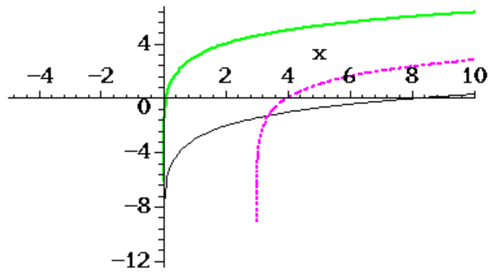
$\log_{10}(x-4)$ en **$^{10}\log(x-4)$** zijn twee verschillende, in gebruik zijnde notaties voor *dezelfde functie.* Het grondtal staat soms voor de log in de lucht, of achter de log als een index.

In dit voorbeeld zien we een groene, een zwarte en een gestippelde roze grafiek.

In paragraaf E1.4 hebben we vastgesteld dat alle logaritmische functies door het punt (1, 0) gaan. De grafiek van $y = \log_{10}(x-4)$ is 4 eenheden naar rechts verschoven en gaat dus door (5, 0), daarom is de groene grafiek hier het juiste antwoord.
Je kunt ook zien dat het domein van deze functie $x > 4$ is, doordat hij in het geheel rechts van $x = 4$ ligt.

<u>Voorbeeld 2 :</u>

Gegeven is de functie $f(x) = \text{'}\log_2(x) + 3\text{'}$ met daarbij de volgende drie grafieken:



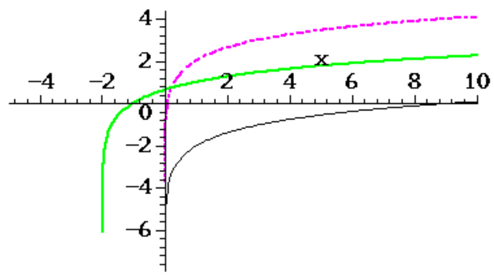
Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- De dunne zwarte
- De gestippelde roze
- De vette groene

Voor grafiek van $y = \log_2 x + 3$ is de grafiek van $y = \log_2 x$ met 3 eenheden omhoog verplaatst, hij gaat dus door het punt (1, 3). Hier is dus weer de groene grafiek de juiste, de zwarte is immers naar beneden verplaatst en de roze naar rechts.

Voorbeeld 3 :

Gegeven is de functie $f(x) = \text{'}\log_3(x) - 2\text{'}$ met daarbij de volgende drie grafieken:



Welke van de drie is de grafiek van de functie?

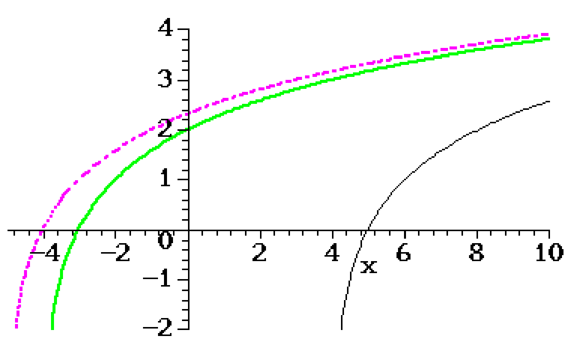
- De dunne zwarte
- De gestippelde roze
- De vette groene

Voor grafiek van y = log3x - 2 is de grafiek van y = log3x met 2 eenheden naar beneden verplaatst, hij gaat door (1, -2). De zwarte grafiek is nu dus de correcte grafiek.

Opgave E1.3.1.

a.

Gegeven is de functie $f(x) = \text{'}\log_2(x - 4)\text{'}$ met daarbij de volgende drie grafieken:

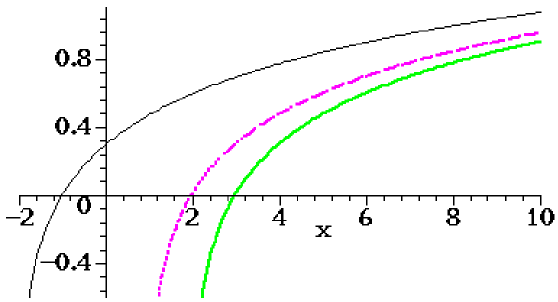


Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- De gestippelde roze
- De vette groene
- De dunne zwarte

b.

Gegeven is de functie $f(x) = \text{'}\log_{10}(x+2)\text{'}$ met daarbij de volgende drie grafieken:

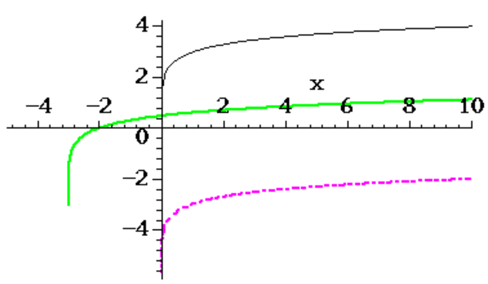


Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- De gestippelde roze
- De dunne zwarte
- De vette groene

c.

Gegeven is de functie $f(x) = \text{'}\log_{10}(x) - 3\text{'}$ met daarbij de volgende drie grafieken:



Welke van de drie is de grafiek van de functie?

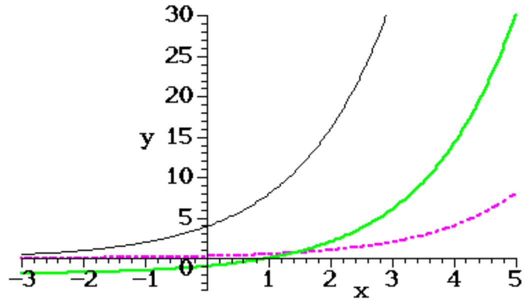
- De vette groene
- De dunne zwarte
- De gestippelde roze

E1.3.2. Grafieken van exponentiële functies

Exponentiële functies

Voorbeeld 1:

Gegeven is de functie $f(x) = $ '2^{x-2}' met daarbij de volgende drie grafieken:



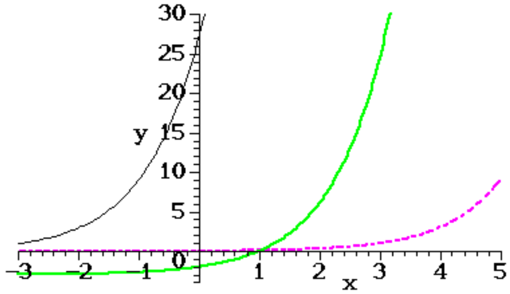
Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- De vette groene
- De dunne zwarte
- De gestippelde roze

Uit paragraaf E1.5 weten we dat alle exponentiële functies door het punt (0, 1) gaan. De grafiek van $f(x) = 2^{(x-2)}$ is de grafiek van $f(x) = 2^x$, die 2 eenheden naar rechts is verschoven. De grafiek gaat dus door het punt (2, 1) en de gestippelde roze grafiek is dus de grafiek die bij $f(x) = 2^{(x-2)}$ hoort.

Voorbeeld 2 :

Gegeven is de functie $f(x) = {}'3^{x-3}{}'$ met daarbij de volgende drie grafieken:



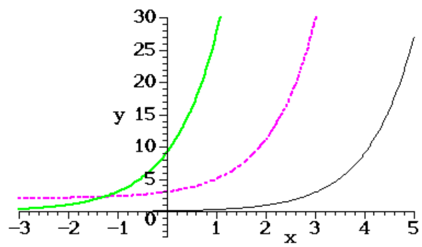
Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- De dunne zwarte
- De vette groene
- De gestippelde roze

De grafiek van $f(x) = 3^{(x-3)}$ is de grafiek van $f(x) = 3^x$, die 3 eenheden naar rechts is verschoven. De grafiek gaat dus door het punt (3, 1) en de gestippelde roze grafiek is dus de grafiek die bij $f(x) = 3^{(x-3)}$ hoort.

Voorbeeld 3 :

Gegeven is de functie $f(x) = {}'3^{x+2}{}'$ met daarbij de volgende drie grafieken:



Welke van de drie is de grafiek van de functie?

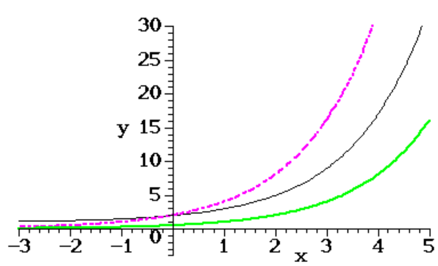
- De dunne zwarte
- De vette groene
- De gestippelde roze

De grafiek van f(x) = $3^{(x+2)}$ is de grafiek van f(x) = 3^x, die 2 eenheden naar links is verschoven. De grafiek gaat dus door het punt (-2, 1) en de groene grafiek is dus de grafiek die bij f(x) = $3^{(x+2)}$ hoort.

Opgave E1.3.2.

a.

Gegeven is de functie $f(x) = {}'2^{x+1}{}'$ met daarbij de volgende drie grafieken:

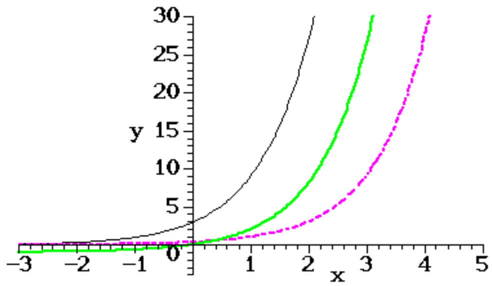


Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- De gestippelde roze
- De vette groene
- De dunne zwarte

b.

Gegeven is de functie $f(x) = {}'3^{x-1}$' met daarbij de volgende drie grafieken:



Welke van de drie is de grafiek van de functie?

- De vette groene
- De gestippelde roze
- De dunne zwarte

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

E1.4. De afgeleide van logaritmische en exponentiële functies

Als introductie op de afgeleide functie (kortweg: afgeleide) richten we nu onze aandacht op de grafiek van log(x). We berekenen de coördinaten van een aantal punten van deze grafiek:

Voor x = 0.0001 is log x = - 4
Voor x = 0.001 is log x = - 3
Voor x = 0.01 is log x = - 2
Voor x = 0.1 is log x = - 1
Voor x = 1 is log x = 0
Voor x = 10 is log x = 1
Voor x = 100 is log x = 2
Voor x = 1000 is log x = 3
Voor x = 10000 is log x = 4

We zien dat f(x) = log x een functie is die op het domein < 0, oneindig> gedefiniëerd is. En verder stijgt log x met toenemende x. Deze stijging heeft nu onze interesse. Wat opvalt is dat log x sterk stijgt vlakbij x = 0 (als x b.v. met 0,000999 verandert, n.l. van 0,0001 naar 0,001 , dan stijgt log x met 1), echter als x toeneemt dan stijgt log x steeds minder snel , want als x toeneemt van 1000 naar 10000 (dus een stijging van 9000 i.p.v. 0,00099) dan stijgt log x ook met (slechts) met 1. Dat gegeven kan je ook anders (een beetje populair) formuleren:
*De **verandering** in log x als gevolg van een verandering in x **neemt af** als x toeneemt.*
Die **mate van verandering** in log x wordt gegeven door de z.g. *afgeleide functie* van log x, ook kortweg *afgeleide* genoemd: *hoe groter de afgeleide, hoe groter de verandering in f(x).*
Het proces om van een functie de afgeleide functie te bepalen noemt men *differentiëren*.
In module D wordt dit uitgebreid behandeld.

We gaan de afgeleide van g(x) = $\log_a$ x bepalen.
We maken gebruik van het eerder geintroduceerde getal e = 2.718281828 ....
Bekijken we de functie g(x) = e^x, dan blijkt dat de afgeleide g'(x) = e^x .De afgeleide van de functie g(x) = e^x blijkt dus gelijk te zijn aan zichzelf. We gaan later in op het algemene geval, de afgeleide van h(x) = a^x

We bepalen de afgeleide f'(x) van f(x) = $\log_a$ x als volgt:

Herschrijf $\log_a x$ gebruikmakend van de eigenschap: overstappen op een ander grondtal uit module E1:

$f(x) = \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a}$ dan is

$f'(x) = f'(\frac{\log_e x}{\log_e a}) = f'(\frac{1}{\log_e a} \cdot \log_e x) = \frac{1}{\log_e a} \cdot f'(\log_e x) =$

$= \frac{1}{\log_e a} \cdot f'(\ln(x)) = \frac{1}{\ln a} \cdot f'(\ln(x))$

Nu moeten we alleen nog $f'(\ln(x))$ zien te vinden.
We gebruiken de schrijfwijze dat $[f(x)]'$ de afgeleide voorstelt van $f(x)$ en het feit dat $[e^x]' = e^x$.
We gaan bewijzen dat als $g(x) = \ln(x)$ dan is $g'(x) = \frac{1}{x}$

Dit weten we: $e^{\ln x} = x$. Gebruikmakend van de kettingregel, krijgen we:

$[e^{\ln(x)}]' = e^{\ln(x)} \cdot [\ln(x)]' = 1$ (want de afgeleide van x is 1)

Vrijmaken van $[\ln(x)]'$:

$$\mathbf{[\ln(x)]' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}}$$

We komen dan tot het volgende resultaat:

$$\mathbf{[\log_a x]'} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot f'(\ln(x)) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \mathbf{\frac{1}{x\ln(a)}}$$

Voorbeeld 1 : de afgeleide van y = log(x) + ln(x) is gelijk aan de afgeleide van y = log(x) plus de afgeleide van y = ln(x) en dat is gelijk aan y'= {1/(xln10)} + (1/x)

Voorbeeld 2 : We willen de afgeleide van y = log (4x + 3) bepalen.
Daartoe stellen we dan u = 4x + 3 .
Dan wordt y = log(4x +3) gelijk aan log u en kunnen we de kettingregel toepassen:
d(log(4x+3)/dx = d(logu)/du . d(4x+3)/dx = (1/u.ln10) . 4
Dan weer u = 4x + 3 substitueren .
Het eindresultaat wordt: dlog(4x+3)/dx = 4 / ((4x+3). ln10)

Opgave E1.4.1.

a. Bepaal de afgeleide van ln(x)
b. Bepaal de afgeleide van $\log_5 x$
c. Bepaal de afgeleide van 5.log(x)
d. Bepaal de afgeleide van 5ln(x)

Gebruik bij de onderstaande opgaven de kettingregel:

e. Bepaal de afgeleide van $\log_5 3x$
f. Bepaal de afgeleide van 4ln(4x + 23)
g. Bepaal de afgeleide van log8x en ook van log(x). Wat valt je op ?
h. Bepaal de afgeleide van log (8x + 4)
i. Bepaal de afgeleide van $\log_5 (4x + 2)$
j. Bepaal de afgeleide van $\log_e (20x - 12)$
k. Bepaal de afgeleide van $\log_5 (3x + 4)$

Tot slot een uitgewerkte opgave : bepaal de afgeleide van $y = \ln (2x + 3)^2$

In dit voorbeeld moet de kettingregel met *drie schakels* toegepast worden :
Stel y = ln(u) met u = v^2 en v = 2x + 3. Dan gaat de kettingregel er als volgt uitzien :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

dus y'(x) = (1/u). 2v. 2 = $\{1/(2x+3)^2\}$. 2(2x+3) . 2 = 4/(2x + 3).
De exponentiële functie: **f(x) = a^x** heeft als afgeleide: **f'(x) = $\frac{da^x}{dx}$ = a^xln(a) .**

We bewijzen dit als volgt:
We maken gebruik van de volgende regels die de revue gepasseerd hebben:

- $[e^x]' = e^x$
- de kettingregel
- $g^{\log_g x} = x$
- $\log_e(a) = \ln(a)$

Herschrijf a^x als volgt :

$$a^x = \left(e^{\log_e a}\right)^x$$

Kettingregel toepassen: $f'(x) = \left(e^{\log_e a}\right)^x \cdot \log_e(a) = a^x \cdot \log_e(a) = a^x \cdot \ln(a)$

Dus als $\mathbf{f(x) = a^x}$ dan : $\mathbf{f'(x) = a^x \ln(a)}$

We zien dus dat $f'(x) = f(x).\ln(a) = f(x).f'(0)$
We hebben al eerder gezien dat $\mathbf{f(x) = e^x}$ als afgeleide zichzelf heeft: $\mathbf{f'(x) = e^x}$
Dit is de enige functie die gelijk is aan zijn afgeleide. Nu enkele voorbeelden van afgeleiden van exponentiële functies:

Voorbeeld 1 : $d/dx(2^x) = 2^x \ln 2$

Voorbeeld 2 : $d/dx(e^x) = e^x$

Voorbeeld 3 : $d/dx(5e^x) = 5e^x$

Voorbeeld 4 : $d/dx(3.3^x) = 3.\ d/dx(3^x) = 3.3^x.\ln 3 = 3^{(x+1)}.\ln 3$

Of: $d/dx(3.\ 3^x) = d/dx(3^{(x+1)}) = 3^{(x+1)}.\ln 3$

Voorbeeld 5 : $d/dx(3.5^x) = 3.5^x.\ln 5$

Opgave E1.4.2.

- **a.** differentieer de functie 12^x
- **b.** differentieer de functie $5 \cdot 13^x$
- **c.** differentieer de functie $7 \cdot 13^x + 8.14^x$
- **d.** differentieer de functie $5.e^x$
- **e.** differentieer de functie $e^{2x}.e^{3x}$ (gebruik de kettingregel)
- **f.** differentieer de functie $8^{2x}.\ 8^{3x}.\ 8^{5x}$ (gebruik de kettingregel)
- **g.** differentieer de functie $230.\ e^{(2x+5)}$ (gebruik de kettingregel)
- **h.** differentieer de functie $17 \cdot 13^{x+1} + 8.14^{x+1}$ (gebruik kettingregel)

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

Antwoorden van de opgaven

Opgave E1.1.1.

a. 4^6

b. $7^7 . 3^8$

c. $x = 19$

d. x en y kunnen alle waarden aannemen, met de restrictie $x + y = 5$.

Opgave E1.1.2.

a. 3
b. 2
c. -1
d. $x = \log_3 5$
e. 5
f. 4
g. 9
h. ¼
i. 9
j. ¼
k. 1/16
l. 50
m. 1
n. $x = (4 + e^2)/2$

Opgave E1.1.3.

a. $\log 200 = 2.3010$
b. 4
c. 3
d. $\log 110 = 2.0419$
e. $c = 0.69897$
f. $\log 10 = 0{,}69897 * \log_5 10$
g. 15
h. -3
i. 43.75

Opgave E1.2.3.

a. x = 2
b. x = 6
c. x = 2.80735
d. x = - 1.43068
e. x = - 1.4556
f. x = 5
g. x = - 9/4

Opgave E3.1.

a. de zwarte grafiek
b. zwarte grafiek
c. gestippelde roze grafiek

Opgave E3.2.

a. groene grafiek
b. gestippelde roze grafiek

Opgave E4.1.

a. 1/x
b. 1/xln5
c. 5/(xln10)
d. 5/x
e. 1/xln5
f. 16/(4x + 23)
g. Beiden 1/(xln10). Logisch want log8x = log8 + log(x) en log8 is een constante.
h. 2/{(2x+1)ln10}
i. 2/{(2x+1)ln5}
j. 5/(5x-3)
k. 3/{(3x+4)ln5}

Opgave E4.2.

a. $12^x \ln 12$
b. $5.13^x.\ln 13$
c. $7.13^x \ln 13 + 8.14^x.\ln 14$

d. $5.e^{x}$
e. $5.e^{5x}$
f. $10.\ 8^{10x} \cdot \ln 8$
g. $460\ .\ e^{(2x+5)}$
h. $17.13^{(x+1)}\ln 13 + 8.14^{(x+1)}\ln 14$