Essential Skills Mathematics

Modulewijzer

Module D2

Toepassingen

differentiëren

Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

- De raaklijn van een grafiek bepalen voor een specifiek punt.
- De stijging, daling en extreme waarden van een functie vinden.
- Afgeleide toepassen om optimaliseringsproblemen op te lossen.

Onderwerpen

D2.1. Raaklijn

D2.1. Extreme waarden

D2.3. Optimalisatieproblemen

Antwoorden van de opgaven

Boek

Je kan gebruikmaken van het volgende boek als aanvullend materiaal:
Basisvaardigheden Wiskunde HTO / 4e druk. ISBN: 978-90-01-57517-5

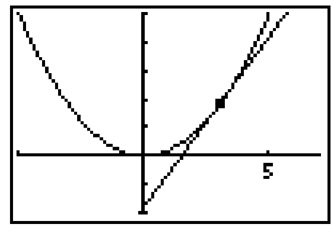
In de tabel hieronder is aangegeven welke paragrafen in het boek overeenkomen met de verschillende paragrafen van deze studiewijzer.

D2.1. Raaklijn aan een grafiek bepalen	§12.1 – 12.2 / p.116-118
D2.2. Extreme waarden berekenen	§12.7 / p.128
D2.3. Een toepassing van differentieren	§12.8 / p.130

D2.1. Raaklijn bepalen

Bij module D1 is de definitie van een afgeleide geïntroduceerd. Daarin is behandeld dat de helling van de kromme van een grafiek samenvalt met de helling (oftewel de richtingscoëfficiënt) van de raaklijn in dat punt.

Als je op het raakpunt bent, zie je dat de raaklijn en de grafiek steeds meer "op elkaar gaan lijken". We demonstreren dit aan de hand van onderstaand voorbeeld:



In de afbeelding hiernaast is f(x) = x^2 en is de raaklijn de lijn die de x- en y-as snijdt en langs een punt van de parabool loopt.

De richtingscoëfficiënt kunnen we zoals toegelicht bij module D1 bepalen door de afgeleide te bepalen: f'(x) = 2x. Voor bijvoorbeeld punt (3,9), geldt dus dat de rc gelijk is aan: 2·3 = 6.

Om nu de vergelijking voor de raaklijn op te stellen gebruiken wij de vergelijking:
$y = \text{rc} \cdot x + b$.
Door *substitutie* $x = 3$ en $y = 9$ in deze vergelijking kunnen we b berekenen:
$9 = 6{\cdot}3 + b$ dus $b = -9$. De vergelijking van de raaklijn is dus $y = 6x - 9$.

Voorbeeld 1
We willen het functievoorschrift bepalen van de raaklijn in het punt x = 5 van de grafiek van de functie, f(x) = $x^3 + 2x^2 + x + 3$.

Dit doen we in een aantal stappen.
Allereerst bepalen we het raakpunt. Bij een waarde van 5 voor x, geldt een y van f(5) = $5^3 + 2{\cdot}5^2 + 5 + 3 = 183$. Het raakpunt is dus: (5, 183).

We gaan nu de rc bepalen van deze functie in het punt x = 5.
Hiervoor bepalen we de afgeleide f'(x).
- f'(x) = $3x^2 + 4x + 1$
- De rc in punt x = 5 is: f(5) = $3{\cdot}5^2 + 4{\cdot}5 + 1 = 96$

De vergelijking van de raaklijn is: y = rc · x + b. Dus y = 96 · x + b.
Nu kunnen we x en y invullen: 183 = 96 · 5 + b → 183 = 480 + b → b = -297.
Het functievoorschrift van de raaklijn is dan: y = 96x - 297

Opgave D2.1.

Bepaal van de volgende functie:

- Het raakpunt.
- De afgeleide.
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn.
- De vergelijking van de raaklijn.

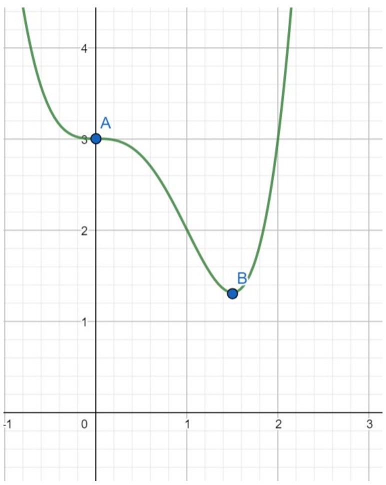
a) $f(x) = -3x^2 + 1$ voor $x = 4$.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

D2.2. Extreme waarden

De afgeleide geeft je in ieder punt van de grafiek de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Daarmee is de afgeleide een geschikt hulpmiddel om het gedrag van een functie te bestuderen. Waar stijgt of daalt een functie? En waar liggen de maxima en minima (extreme waarden).

Voorbeeld



Kijk naar de bovenstaande grafiek. We onderzoeken de bijbehorende functie
$f(x) = x^3(x - 2) + 3$;
Allereerst schrijven we f(x) uit: $f(x) = x^3(x - 2) + 3 = x^4 - 2x^3 + 3$

Bij A en B loopt de raaklijn aan de grafiek horizontaal.
Punt B illustreert een **minimum** van $f(x)$; punt A is een **buigpunt** van f(x).
Op beide plaatsen is de helling 0 en dus geldt: Afgeleide f(x)' = 0.

Regel:

Als je de extreme waarden (uiterste waarden, minimum en maximum) van een functie $f(x)$ wilt opsporen moet je de vergelijking $f'(x) = 0$ oplossen. Soms krijg je daarbij ook gegevens over een buigpunt van de grafiek.

Als $f'(x) > 0$ dan stijgt de functie
Als $f'(x) < 0$ dan daalt de functie

In een minimum of maximum stijgt of daalt de functie niet en is $f'(x) = 0$

Om te bepalen wat de coördinaten van de extreme waarden (A en B) zijn doorlopen we de volgende stappen.

Stap 1) Bepaal de afgeleide van f(x). Dus: f'(x)

- $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$
- $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

Stap 2) Stel de afgeleide gelijk aan 0.
Voor deze waarde geldt namelijk dat de functie niet stijgt of daalt en we het minimum of maximum kunnen vinden.

- $4x^3 - 6x^2 = 0$

Stap 3) Los deze vergelijking op
Dit doen we door $2x^2$ buiten haakjes te brengen:
- $2x^2 \cdot (2x - 3) = 0$ geeft $x = 0$ en $x = 1.5$ als oplossingen.

Sta[4) Vul de gevonden waarden van x in, in de functie
De bijbehorende y-coördinaten zijn:
- $f(0) = 0^3(0 - 2) + 3 = 3$
- $f(1,5) = 1.5^3(1.5 - 2) + 3 = 1.3125$

Dus de coördinaten van de punten met een horizontale raaklijn zijn:
A(0, 3) en B(1.5 , 1.3125)

Met behulp van bovenstaande stappen kunnen we een tekenoverzicht maken, van f'(x), zoals geleerd bij module C2.

$2x^2$	+ + +	0	+ + +	1.5	+ + +
$2x - 3$	- - -	0	- - -	1.5	+ + +
$2x^2 \cdot (2x - 3)$	- - -	0	- - -	1.5	+ + +

Het teken van f'(x) veranderd alleen bij x = 1.5. Hieronder zie je het verband tussen het teken van f'(x) en het dalen of stijgen van f(x). Links van x = 1.5 daalt f(x) en rechts van x = 1.5 stijgt f(x).

x-waarde		0		1,5	
Teken van f'(x)	- - -	0	- - -	0	+ + +
Gedrag van f(x)	dalend		dalend		stijgend

Aan het tekenverloop van f′(x) zie je dat f(x) in (1.5 , 1.3125) een **minimum** heeft, maar in (0,3) alleen maar even horizontaal loopt en daarna weer verder daalt. Dit noemen we een **buigpunt**.

Opgave D2.2.

Bepaal van de volgende functies;

- De afgeleide functies.
- De coördinaten van de extremen (minimum en/of maximum).

a) $f(x) = x^2 - 8x$

b) $g(x) = x^2 - 8x + 16$

c) $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$

e) $i(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

D2.3 Optimalisatieproblemen

Je gebruikt afgeleiden vaak in toepassingen die met optimalisering te maken hebben. In de wiskunde en de informatica is een **optimaliseringsprobleem** het probleem van het vinden van de *beste* oplossing uit alle haalbare oplossingen.

Situaties waarbij er sprake is van optimaliseringsproblemen:

- Wanneer is het verbruik minimaal?
- Of wanneer is de opbrengst het grootst?

Bij optimalisering moet je altijd beginnen met "iets onbekends" gelijk te stellen aan x

- Bijvoorbeeld de breedte van een rechthoek.

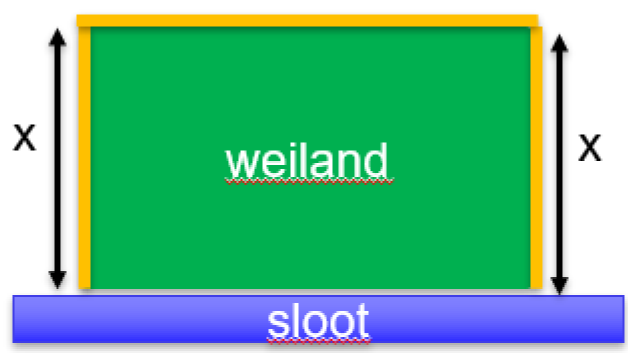
Daarna ga je een functie $f(x)$ opstellen die je wilt optimaliseren

- Bijvoorbeeld de oppervlakte van een rechthoek: lengte maal breedte.

Vervolgens ga je de afgeleide functie: $f'(x)$, gelijkstellen aan nul en deze vergelijking oplossen om de extreme waarde(n) te vinden.

Voorbeeld 1

Een boer heeft gaas en hout ingekocht voor een afrastering van 100 meter lengte. Langs zijn weiland loopt een sloot. De boer wil een zo groot mogelijk stuk weiland hebben, rechthoekig van vorm, voor een paar van zijn schapen. Met geel is in het plaatje aangegeven waar de afrastering komt (langs de sloot komt geen hek).



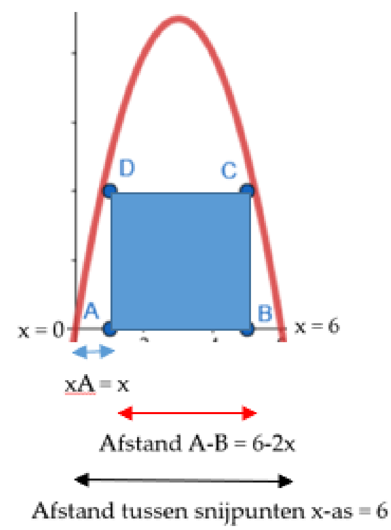
Het berekenen van de maximale oppervlakte die hij hiermee kan afschermen is een voorbeeld van een optimalisatie.

- De breedte van het weiland stellen we gelijk aan x.
- Totale afrastering is 100, dus de lengte van het weiland is: $100 - 2x$
- Oppervlakte = $A(x) = x \cdot (100 - 2x) = 100x - 2x^2 = -2x^2 + 100x$
- A(x) is een tweedegraads functie van de vorm $ax^2 + bx + c$ met $a = -2$; $b = 100$; $c = 0$;)
- A(x) is een bergparabool (omdat $a = -2$) en heeft dus een maximum. Je kan dit ook bepalen door een tekenoverzicht te maken, zoals beschreven in de vorige

paragraaf.

- Het maximum vindt je door $A'(x) = 0$ op te lossen.
- $A'(x) = -4x + 100 = 0$. Hieruit volgt $x = 25$.
- Vul $x = 25$ in bij $A(x)$. Dus de maximale oppervlakte is:
  $A(25) = 25 \cdot (100 - 2 \cdot 25) = 25 \cdot 50 = 1250$ (m^2)

Voorbeeld 2
Bij dit voorbeeld gaan we kijken naar een getekende rechthoek binnen de grenzen van de paraboolboog.



De hiernaast getekende paraboolboog hoort bij de functie $y = 6x - x^2$.

De punten D en C liggen op die boog, A en B liggen op de x-as.

a) bepaal voor welke waarde van x de maximale omtrek geldt
b) bepaal voor welke waarde van x de maximale oppervlakte geldt

Uitwerking a) – de omtrek:
De omtrek wordt bepaald door: breedte + lengte + breedte + lengte.

De breedte van de rechthoek is weergegeven door de afstand tussen A en B. We stellen dat $x_A = x$ *(de afstand tussen $x = 0$ en $x = A$).*
De snijpunten met de x-as vinden we door $6x - x^2 = 0$ op te lossen:
$6x - x^2 = x(6 - x) = 0$. Hieruit volgt $x = 0$ en $x = 6$;
De coördinaten van de snijpunten met de x-as zijn dus: A(0,0) en B(6,0)

Doordat de afstand tussen de snijpunten met de x-as gelijk is aan $(6 - 0) = 6$, en $x_A = x$, geldt dat de afstand tussen A en B en dus de breedte, gelijk is aan: $6 - 2x$.

De lengte (hoogte) van de rechthoek is gelijk aan BC of AD.
Oftewel: De lengte wordt bepaald door $f(x) = 6x - x^2$.

Breedte = $6 - 2x$; lengte = $6x - x^2$

- De functie van de omtrek stellen we gelijk aan $O(x)$.
- $O(x) = 2(6x - x^2) + 2(6 - 2x) = 12x - 2x^2 + 12 - 4x = 8x - 2x^2 + 12 = -2x^2 + 8x + 12$

- O(x) is een berparabool en heeft een maximum. Die vinden we door eerst uit te zoeken voor welke x geldt dat O'(x) = 0. Je kan dit ook bepalen door een tekenoverzicht te maken, zoals beschreven in de vorige paragraaf.
- $O'(x) = -4x + 8$.
- $-4x + 8 = 0$ geeft $x = 2$.
- Om het maximum te vinden, vullen we $x = 2$ in bij O(x):
- $O(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 12 = -8 + 16 + 12 = 20$.

Een maximale omtrek wordt dus gevonden voor een x-waarde van 2 en de omtrek is dan 20 m.

Uitwerking b) – de oppervlakte:

- De oppervlakte wordt bepaald door: lengte · breedte.
- De functie van de oppervlakte stellen we gelijk aan A(x).
- $A(x) = (6x - x^2) \cdot (6 - 2x) = 36x - 12x^2 - 6x^2 + 2x^3 = 36x - 18x^2 + 2x^3 = 2x^3 - 18x^2 + 36x$
- $A'(x) = 0$ geeft $6x^2 - 36x + 36 = 0$
- $6(x^2 - 6x + 6) = 0$, dus: $x^2 - 6x + 6 = 0$

abc-formule toepassen: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

a = 1, b = -6, c = 6

$$x = \frac{--6 \pm \sqrt{-6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

$x_1 = 3 + \sqrt{3}$

$x_2 = 3 - \sqrt{3}$

Als we $x_1 = 3 + \sqrt{3}$ invullen bij $A(x)$, komt hier een negatief getal uit
(een oppervlakte is nooit negatief, dus deze x valt af).
Blijft over $x_2 = 3 - \sqrt{3}$ en invullen bij $A(x)$ geeft **Max. ≈ 20,8**

De maximale oppervlakte wordt dus gevonden voor een x-waarde van $3 - \sqrt{3}$ en de oppervlakte is dan 20,8 m².

Opgave D2.3.

Een timmerman krijgt de opdracht om een kist te maken met een vierkante bodem. De openstaande zijden van de kist kosten 3 euro per vierkante meter, terwijl de bodem 4 euro per vierkante meter kost. De timmerman krijgt een budget van 48 euro om bouwmaterialen te kopen. Wat is het maximale volume dat de kist kan krijgen?

a) Noem de hoogte h dm en de zijde van de bodem x dm. Schrijf de materiaalkosten K als een functie van x en h.
b) Druk h uit in x.
c) Bij welke waarde van x, is de volume maximaal?

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

Antwoorden van de opgaven

Opgave D2.1.

a) $f(x) = -3x^2 + 1$ voor $x = 4$
Raakpunt: De y-waarde is gelijk aan: $f(4) = -3 \cdot 4^2 + 1 = -47$. Raakpunt is (4, -47)
De afgeleide: $-6x$
Rc van de raaklijn: $-6 \cdot 4 = -24$
De vergelijking van de raaklijn: $y = -24x + b$. Nu x en y invullen. $-47 = -24 \cdot 4 + b \rightarrow$ --
$-47 = -96 + b \rightarrow 49 = b$. Dus: $y = -24x + 49$.

Opgave D2.2.

a) $f(x) = x^2 - 8x \quad f'(x) = 2x - 8$
$2x - 8 = 0 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4.$
$f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 = -16$
Het minimum is dus (4, -16)

b) $g(x) = x^2 - 8x + 16 \quad g'(x) = 2x - 8$
$2x - 8 = 0 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4.$
$g(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 16 = 0$
Het minimum is dus (4, 0)

c) $h(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$ Toepassen quotiëntregel.
$h'(x) = \frac{2(x^2+4)-2x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$
$\frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2} = 0$
De uitkomst is 0, als de teller gelijk is aan 0, aangezien $\frac{0}{(x^2+4)^2} = 0$
Dus: $-2x^2 + 8 = 0 \rightarrow -2x^2 = -8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = -2$ of $x = 2$
$h(-2) = \frac{2 \cdot -2}{-2^2+4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$
$h(2) = \frac{2 \cdot 2}{2^2+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
Minimum: $(-2, -\frac{1}{2})$ Maximum: $(2, \frac{1}{2})$

d) $i(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ $i'(x) = 1 + -x^{-2}$

- $1 + -x^{-2} = 0$
- $-x^{-2} = -1$
- $-\frac{1}{x^2} = -1$
- x = -1 of x = 1

$i(-1) = x + \frac{1}{x} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$
$i(1) = x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1} = 2$
Minimum: (-1, −2) Maximum: (1,2)

Opgave D2.3.

Een timmerman krijgt de opdracht om een kist te maken met een vierkante bodem. De openstaande zijden van de kist kosten 3 euro per vierkante meter, terwijl de bodem 4 euro per vierkante meter kost. De timmerman krijgt een budget van 48 euro om bouwmaterialen te kopen. Wat is het maximale volume dat de kist kan krijgen?

a) Noem de hoogte h dm en de zijde van de bodem x dm. Schrijf de materiaalkosten K als een functie van x en h.
De kosten van de kist worden bepaald door de 4 openstaande zijden en de vierkante bodem van de kist.
  - De oppervlakte van de bodem is: $x \cdot x = x^2$.
  - De kosten van de bodem, zijn 4 euro per dm, dus $4 \cdot x^2 = 4x^2$.

  - De oppervlakte van 1 zijde is: $x \cdot h = xh$.
  - De kosten van 1 zijde zijn, zijn 3 euro per dm, dus $3 \cdot xh = 3xh$
  - Er zijn 4 zijden. Dus de totale oppervlakte van de zijden is: $4 \cdot 3xh = 12xh$.
  - De totale oppervlakte van de kist = $4x^2 + 12xh$.

b) Druk h uit in x.
Er is een budget van 48 euro beschikbaar, dus K = 48.Invullen in het resultaat van a), geeft: $48 = 4x^2 + 12xh$.
We willen nu h uitrukken in x, oftewel: h = …
$48 = 4x^2 + 12xh \rightarrow 48 - 4x^2 = 12xh \rightarrow \frac{48 - 4x^2}{12x} = h \rightarrow \frac{12 - x^2}{3x} = h$

c) Bij welke waarde van x, is de volume maximaal?
Hiervoor moet eerst de formule van de volume worden bepaald:

lengte · breedte · hoogte

$V = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot h$

Bij b heb je h uitgedrukt in x. Dat vul je nu in.

$V = x^2 \cdot \frac{12 - x^2}{3x} = \frac{12x^2 - x^4}{3x} = \frac{12x - x^3}{3}$

Om de maximale volume te bepalen, stellen we de afgeleide gelijk aan 0.

$V' = 0 \rightarrow 3 \cdot (12 - 3x^2) = 0 \rightarrow 36 - 9x^2 = 0 \rightarrow 36 = 9x^2 \rightarrow 4 = x^2 \rightarrow x = 2$ of $x = -2$

Een negatieve lengte kan niet. Dus x = -2 valt af.

We kunnen nu x = 2 invullen in de formule van V.

$V = \frac{12x - x^3}{3} \rightarrow \frac{12 \cdot 2 - 2^3}{3} = \frac{16}{3}$.