Essential Skills Mathematics

Modulewijzer

Module D1

Afgeleide van een functie

differentiëren

Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben kun je:

- Vertellen waartoe afgeleide van functies dienen.
- De helling ter plaatse van een bepaald punt van de grafiek bepalen
- Diverse functies differentiëren.
- De productregel toepassen
- De quotiëntregel toepassen.
- De kettingregel toepassen.

Onderwerpen

D1.1 Definitie van afgeleide

D1.1. Helling van een grafiek

D1.2. Differentiëren van standaard functies

D1.3. Productregel

D1.4. Quotiëntregel

D1.5. Kettingregel

Antwoorden van de opgaven

Boek

Je kunt gebruikmaken van het volgende boek als aanvullend materiaal:
Basisvaardigheden Wiskunde HTO / 4e druk. ISBN: 978-90-01-57517-5

In de tabel hieronder is aangegeven welke paragrafen in het boek overeenkomen met de verschillende paragrafen van deze studiewijzer.

D1.1. Helling bepalen	(basis §12.2 / p.118)
D1.2. Differentiëren van een veelterm	§12.3 / p.120
D1.3. Productregel	§12.4 / p.122
D1.4. Quotientregel	§12.6 / p.126
D1.5. Kettingregel	§12.5 / p.124

D1.1. Helling bepalen

Richtingscoëfficiënt rechte lijn

De formule van een lijn is y = ax + b. De stijging of daling van een lijn vinden we door te kijken naar hoeveel die stijgt of daalt bij een horizontale verplaatsing. In *fig 1* is er een verticale verplaatsing van 1 omhoog bij een horizontale verplaatsing van 2 naar rechts. Bij een horizontale verplaatsing van 1 naar rechts is er dus een verticale verplaatsing van ½ omhoog. Dit getal geeft de helling (mate van stijging of daling) aan van de rechte lijn en noemen we richtingingscoëfficiënt van de lijn, kort rc of rico genoemd.

In de formule van een lijn *l:* y = ax + b is rc = a.

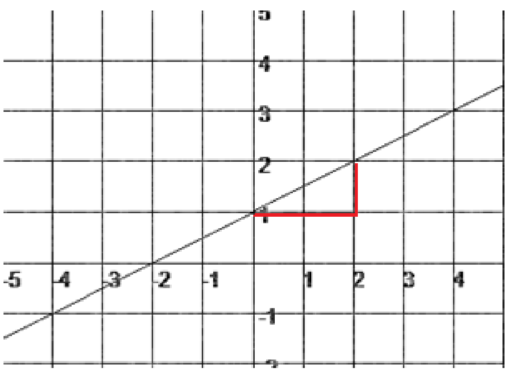

fig 1

Bij het vinden van de helling, de richtingscoëffiënt a, passen we het volgende toe:

$$\frac{verticale\ verplaatsing}{horizontale\ verplaatsing} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}\ .$$

Δ (spreek uit: delta) staat voor het verschil (de differentie), zie *fig 2*

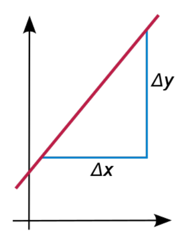

fig 2

Definitie van een afgeleide

Een kromme heeft geen richtingscoëfficiënt. We gebruiken de volgende eigenschap. Elk punt op aarde heeft lokaal een plat vlak als omgeving. De aarde is rond, maar lopend op straat kun je dat niet zien. Pas als je ver uitzicht hebt, merk je er iets van: bijvoorbeeld een schip dat op zee "onder de horizon" zakt. Net zoals in een punt op aarde de directe omgeving vlak is, net zo gebruiken we dat in een punt op een kromme de directe omgeving (als je maar dichtbij genoeg blijft) een rechte lijn is. De helling van de kromme valt dus samen met de helling van een rechte lijn namelijk van de raaklijn in dat punt.

Voor de helling van de grafiek in een punt gebruik je dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in dat punt. Als je op het raakpunt bent, zie je dat de raaklijn en de grafiek steeds meer “op elkaar gaan lijken”. We demonstreren dit aan de hand van onderstaand voorbeeld:

Voorbeeld 1

Gegeven de functie $f(x) = x^2$. De grafiek (zie *fig 3*) noemen we een parabool.

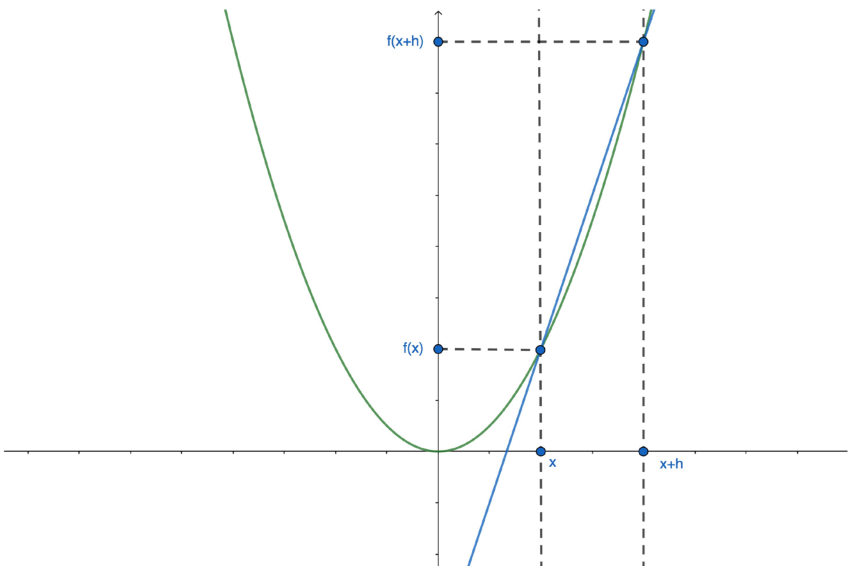

fig 3

We gebruiken:

$$\frac{verticale\ verplaatsing}{horizontale\ verplaatsing}$$

We verplaatsen vanuit punt x een stukje h naar rechts naar $x + h$. De horizontale verplaatsing Δx is dan gelijk aan h omdat $(x+h) - x = h = \Delta x$

Verticaal gaan we van f(x) naar $f(x + h)$, dus de verticale verplaatsing Δf is $f(x + h) - f(x)$

Laat nu h steeds kleiner worden zodat $x + h$ steeds dichter bij x komt.

De $helling = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *of* $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ van de functie f(x) = x^2 wordt aangeduid als $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ en is de toename van de functie als gevolg van een toename (Δx) in de x, waarbij we de Griekse hoofdletter delta (Δ) gebruiken voor een toename. We noemen $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ook wel differentiequotiënt.

In de parabool van de grafiek is Δx = h of het verschil van x ten opzichte van de vorige waarde als je langs de punten van de parabool loopt.

Een ander woord voor de lokale helling is de *AFGELEIDE*. Notatie: $\frac{dy}{dx}$ (uitgesproken als "dy dx") Ook de notatie $y' = f'(x)$ komt veel voor.

Als we naar *fig 3* kijken, dan zien dat $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ de helling (richtingscoëfficiënt) van de blauwe lijn is door het punt $f(x + h)$ en het punt $f(x)$.

Als we h heel erg klein maken, krijgen we een verschil $f(x+h) - f(x)$ dat verwaarloosbaar is. De blauwe lijn verandert als het punt f(x + h) steeds dichter het punt f(x) nadert en wordt de raaklijn in het punt x, de rode lijn in *fig 4.*

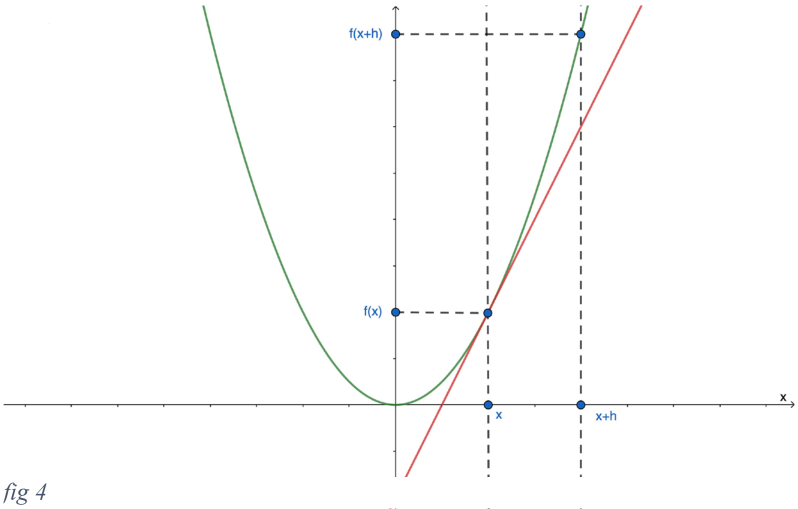

fig 4

Het getal $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ is bij hele kleine h de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt x en valt samen met helling van de grafiek in het punt x (de lokale helling). Doe dit voor elk punt, dan krijg je weer een functie, de hellingsfunctie. Deze functie geeft voor elke x steeds de rc van de raaklijn in punt x aan oftewel de **stijging/daling** aan van de oorspronkelijke grafiek van functie *f*.

We noemen deze nieuw verkregen functie de afgeleide functie of afgeleide van *f* (of van $f(x)$) en noteren dat met f' of $f'(x)$.
Enkele andere notaties voor de afgeleide zijn: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{\mathrm{d}f(x))}{dx}$, $[f(x)]'$ of $(f)'$.

Voor onze functie $f(x) = x^2$. is dat $f'(x) = 2x$.
Dus, de afgeleide of de functie voor de lokale helling van $f(x) = x^2$ *is* $2x$.

Dit kan berekend worden met behulp van de formule voor het bepalen van de richtingscoëfficiënt (rc):

$$\text{rc} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h} = \frac{\cancel{x}^2 \ + h(2x+h) - \cancel{x}^2}{h} =$$

$$\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h$$ Als we h richting 0 laten gaan, blijft $2x$ over.

De helling in punt A (3,9) kunnen we dus bepalen door de afgeleide van f(x) te bepalen en vervolgens voor x, 3 in te vullen. De afgeleide f'(x) is hierboven berekend en is gelijk aan 2x. De helling in punt A (3,9) is daarom: $f'(3) = 2\mathbf{x} = 2 \cdot 3 = 6$. Dit is de richtingscoëfficiënt (rc) van de raaklijn.

De helling/rc in punt B (4,16) is dus: $f'(4) = 2\mathbf{x} = 2 \cdot 4 = 8$.

Voorbeeld 2

In voorbeeld 1 is de algemene formule bepaald, waarmee de rc van de raaklijn van elk specifiek punt van de grafiek bepaald kan worden. In sommige gevallen wil je niet de richtingscoëfficiënt van een specifiek punt bepalen, maar de helling benaderen ter plaatse van een bepaald punt, waarbij sprake is van een kleine toename.

We bekijken weer de functie f(x) = x^2. We willen nu de helling benaderen ter plaatse van het punt (4,16) bij een toename Δx, van 0,002. Dit kan berekend worden met behulp van de formule voor het bepalen van de richtingscoëfficiënt (rc):

De $helling = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *of* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ = rc = $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- De toename Δx, is h, is gegeven en is gelijk aan 0,002.
- De toename Δy, kan worden berekend.
    - f(x + h), betreft de waarde van y behorend bij een waarde van x + h, met x + h is 4 + 0,002 (i.v.m. met punt (4, 16) en een Δx, van 0,002).
        - f(4,002) = $4{,}002^2$ = 16,016004.
    - f(x), betreft de waarde van y behorend bij een waarde van x, met x is 4.
        - f(4) = 4^2 = 16.
    - Δy = $f(x+h) - f(x)$ = 16,016004 – 16 = 0,016004.
- De $helling = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *of* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ = rc = $\frac{0{,}016004}{0{,}002}$ = 8,002

Voorbeeld 3

We bekijken nu de functie f(x) = 2^x. We willen de helling benaderen ter plaatse van het punt (1,2) bij een toename Δx, van 0,004.

- De toename Δx, is h, is gegeven en is gelijk aan 0,004.
- De toename Δy, kan worden berekend.
    - f(x + h), betreft de waarde van y behorend bij een waarde van x + h, met x + h is 1 + 0,004 (i.v.m. met punt (1, 2) en een Δx, van 0,004).
        - f(1,004) = $2^{1{,}004}$ = 2,005528718021554.
    - f(x), betreft de waarde van y behorend bij een waarde van x, met x is 1.
        - f(1) = 2^1 = 2.
    - Δy = $f(x+h) - f(x)$ = 2,005528718021554 – 2 = 0,005528718021554.

De $helling = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *of* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ = rc = $\frac{0{,}005528718021554}{0{,}004}$ = 1,388 (afronden 3 decimalen)

Opgave D1.1.

a) Bepaal de helling in het punt (5,25) bij een toename van $\Delta x = 0{,}003$ voor de functie $f(x) = x^2$

b) Bereken de helling in het punt (16,4) aan de grafiek van $y = \sqrt{x}$

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

D1.2. Differentiëren van standaard functies

Differentiëren is het bepalen van het functievoorschrift van de afgeleide. In de onderstaande tabel staan de functievoorschriften voor een aantal standaard functies opgesomd.

	f(x)	f'’(x)
1	y = c, met c een constante	y'(x) = 0, omdat Δy = 0
2	y = ax +b	y'(x) = a, omdat a= rc
3	y = x^p	y' = p x^{p-1}
4	y = $\sqrt{x}$	y' = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ = ½ $x^{-½}$

In een constante functie (zie: regel 1), zit geen helling (dit is een horizontale lijn door het punt (0,c)) Indien je dus een constante functie differentieert, krijg je als afgeleide 0.

√

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \text{geeft} \quad f'(x) = \tfrac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{½}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

We passen hier de regel toe voor het differentiëren van y = x^p (zie: regel 3))

Verder is het belangrijk om de volgende regels te weten:

1) Als f(x) = g(x) + C, dan is f'(x) = g'(x)
2) Als f(x) = c· g(x), dan is f'(x) = c · g'(x)

In de eerste regel heeft C geen effect op de helling van de grafiek van de functie. Stel je een kromming voor van de grafiek van functie g(x) die je verplaatst naar omhoog of omlaag (Dus g(x)+ C). De kromming blijft na een verticale verplaatsing omhoog of omlaag hetzelfde. De helling in elk punt blijft dus onveranderd.
In de tweede regel staat dat als je een functie vermenigvuldigt met c ten opzichte van de x-as dwz dat elke f(x) met c vermenigvuldigd wordt, dat dan de helling f′(x) in elk punt ook met c vermenigvuldigd wordt.

Voorbeeld 2
Bepaal de afgeleide van f(x) = $\frac{1}{x^5}$
Om de afgeleide van $\frac{1}{x^5}$ te kunnen bepalen, passen we eerst de regel toe die in module A is geïntroduceerd: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$\frac{1}{x^5}$, schrijven we dus als x^{-5}. Nu kunnen we regel 3 toepassen:

f(x) = $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$ geeft f′(x) = $-5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$.

Somregel
Om de afgeleide van een functie te kunnen bepalen, als deze bijvoorbeeld uit meerdere termen bestaat hebben wij soms iets meer regels nodig. De afgeleide van een som / verschil gelijk is aan de som / het verschil van de afgeleiden **(de somregel)**.
Symbolisch: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Voorbeeld 3
We differentiëren de functie $f(x) = x^5 + 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 5x - 113$;
er komt uit: $f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 30x^2 + 12x + 5$

√ √

D1.3. Productregel

Naast het differentiëren van termen kunnen wij ook factoren differentiëren. We gebruiken daarvoor de productregel. Deze is niet zo intuïtief als de som en verschil regel die geïntroduceerd zijn in het de vorige sectie.

De productregel:

$y = f(x) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) \cdot g(x) \; + \; f(x) \cdot g'(x)$ kortweg: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Je kunt dit makkelijker onthouden door te denken dat de afgeleide van twee factoren een som is van het product, waarbij eerst de een en dan de ander wordt gedifferentieerd terwijl jij het blijft vermenigvuldigen.
Ga zelf na dat $(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'$

Neem als voorbeeld

- $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$; $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5$

Voorbeeld
Voor de functie $y = (-3 + x^5) \cdot (1 - x)$ dient de afgeleide uitgerekend te worden. De functie y is het product van twee functies.
$f(x) = (-3 + x^5)$ en $g(x) = (1 - x)$.
$f'(x) = 5x^4$ en $g'(x) = -1$.

Om y′ te kunnen berekenen passen wij de productregel toe.

$y' = 5x^4 \cdot (1 - x) + (-3 + x^5) \cdot -1$
$y' = 5x^4 - 5x^5 + 3 - x^5$
$y' = 5x^4 - 6x^5 + 3$
$y' = -6x^5 + 5x^4 + 3$

Opgave D1.3.

Bereken de afgeleide van de volgende functies. Gebruik daarbij de productregel:
a) $y = (x+1) \cdot (x + 2)$
b) $y = (3x - 1) \cdot (x + 3)^4$
c) $y = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 1)$
Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

D1.4. Quotiëntregel

In het voorgaande hebben wij gezien hoe wij functies kunnen differentiëren die product van elkaar zijn. Echter, soms hebben wij te maken met rationale functies. Deze herken je doordat ze in een breuk staan. Dan is de som of productregel niet toereikend om de afgeleide van deze functie te kunnen bepalen. Dan gebruiken wij de ***quotiëntregel.***

$y=\dfrac{f}{g}\Rightarrow y'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$ let op: eerst de teller differentiëren !

$$\frac{noemer\ \cdot\ afgeleide\ teller - teller\ \cdot\ afgeleide\ noemer}{noemer^2}$$

Voorbeeld
Voor het vinden van de afgeleide van de functie y dienen wij de quotiëntregel toe te passen.

$$y=\frac{2x+3}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{2\cdot(x+1)-(2x+3)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

Opgave D1.4.

Bereken de afgeleide van de volgende functies. Gebruik daarbij de quotiëntregel:

a) $\dfrac{x-3}{x-4}$

b) $x+\dfrac{x^2}{3x+1}$

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

D1.5. Kettingregel

De kettingregel in woorden: als je een functie *van* een functie differentieert, dan moet je niet vergeten nog met de afgeleide van die tweede functie te vermenigvuldigen. Als H staat voor het Haakjesdeel dan kan je dit symbolisch zo opschrijven:

als $y = f\,(\text{H})$ dan is $y\,' = f\,'\,(\text{H}) \cdot \text{H}\,'$

Illustratief ziet het er zo uit:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & u = g(x) \arrow[d, "f"] \\
& y = f(g(x)) \text{ met } H = g(x)
\end{tikzcd}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

De afgeleide van een kettingfunctie is het product van de afgeleiden van de schakels

Ga bij het berekenen van de afgeleide van een samengestelde functie (kettingfunctie) y = f (x) als volgt te werk:

- Schrijf f als een ketting van twee functies.
- Bereken van ieder van de twee functies de afgeleide.
- Druk het product van de afgeleide functies uit in x.

Voorbeeld

$f\,(x) = y = (x^2 + 1)^5$ is een voorbeeld van een samengestelde functie. Samengesteld functies worden gemaakt door het resultaat van de ene functie te gebruiken als argument voor een volgende functie. De samengestelde functie in dit voorbeeld kan opgeschreven worden als y = *f(g(x).*

$g(x) = u = x^2 + 1$ met $u = x^2 + 1$ de basis functie. Dus $f(g(x) = (x^2 + 1)^5 = f(u) = (u)^5$.

du/dx = 2x. dus $g'(x) = 2x$

$y = (u)^5$; $dy/du = 5u^4$; $f\,(u) = u^5$ met $u = g(x)$

dus $f\,'(u) = 5u^4$

$f\,'(x) = 5u^4 \cdot 2x$
$f\,'(x) = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x$ *substitutie* $u = x^2 + 1$ geeft $f\,'(x) = 10x(x^2 + 1)^4$

Opgave D1.5.

Bereken de afgeleide van de volgende functies. Gebruik daarbij ook de kettingregel:

a) $\sqrt{(3x^2+4)}$

b) $(5x - 6)^3$

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

Antwoorden van de opgaven

Opgave D1.1.

a) Bepaal de helling in het punt (5,25) bij een toename van $\Delta x = 0{,}003$ voor de functie
$f(x) = x^2$
$x = 5$, $y = 25$.
$f(x) = f(5) = 5^2 = 25$
$f(x + \Delta x) = f(5{,}003) = (5{,}003)^2 = 25{,}030009$

b) Bereken de helling in het punt (16,4) aan de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = x^{1/2}$ dus $f'(x) = 1/2 \,.\, x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; rico = 1/8

Opgave D1.2.

Bereken de afgeleide van de volgende functies:

a) $y = x$ $y' = 1$

b) $y = x^5$ $y' = 5x^4$

c) $y = x\sqrt{x}$ $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

d) $y = \frac{1}{x^2}$ $y' = \frac{1}{2x}$

e) $y = x^2 + 3x + 1$ $y' = 2x + 3 + 0 = 2x + 3$

f) $y = \sqrt{x} - x^5$ $y' = ½\, x^{-1/2} = ½ / \sqrt{x}$

g) $y = (x-2)(x^2+2)$ $y' = (x-2)(x^2+2) = x^3+2x-2x^2-4 = x^3-2x^2+2x-4$ $y' = 3x^2-4x+2$

h) $i(t) = 3x^2+5t$ $i'(t) = 5$, omdat x in deze vergelijking de constante is

Opgave D1.3.

Bereken de afgeleide van de volgende functies. Gebruik daarbij de productregel:

a) y = (x+1) · (x + 2) y′ = 2x + 3

b) y = $3x^2$ y′= 6x

c) y = (3x - 1) $(x + 3)^4$ y′= $(x + 3)^3$ (15x + 5)

d) y= $(x^2 - 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 1)$ y′= $2x \cdot (x^3 + 2x^2 + 1)$ **+** $(x^2 - 1)(3x^2 + 4x)$

Opgave D1.4.

Bereken de afgeleide van de volgende functies. Gebruik daarbij de quotiëntregel:

a) $\frac{x-3}{x-4}$ y’ = $\frac{1.(x-4)-(x-3).1}{(x-4)^2} = -\frac{1}{(x-4)^2}$

b) $x + \frac{x^2}{3x+1}$ y’= $1 + \frac{2x(3x+1)-x^2.3}{(3x+1)^2} = 1 + \frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}$

Opgave D1.5.

Bereken de afgeleide van de volgende functies. Gebruik daarbij ook de kettingregel:

a) √ $(3x^2+4)$ y’= $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$

b) $(5x - 6)^3$ y′ = $15 \cdot (5x - 6)^2$