Essential Skills Mathematics

Studiewijzer

Module C2

Functies

Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben moet je:

- Begrijpen wat functies zijn en functies kunnen manipuleren.
- Het verband begrijpen tussen de grafiek en de vergelijking van een lineaire functie.
- Het verband begrijpen tussen de grafiek en de vergelijking van een gebroken lineaire functie.
- Het verband begrijpen tussen de grafiek en de vergelijking van een kwadratische functie.
- Het verband begrijpen tussen de grafiek en de vergelijking van een wortelfunctie.
- Grafieken kunnen gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen.

Onderwerpen

C2.1. Functies en het manipuleren van functies.

C2.2. De grafiek en de vergelijking van een lineaire functie.

C2.3. De grafiek en de vergelijking van een gebroken lineaire functie.

C2.4. De grafiek en de vergelijking van een kwadratische functie.

C2.5. De grafiek en de vergelijking van een wortelfunctie.

C2.6. Ongelijkheden oplossen met behulp van grafieken.

Boek

Je kan gebruikmaken van het volgende boek als aanvullend materiaal:
Basisvaardigheden Wiskunde HTO / 4e druk. ISBN: 978-90-01-57517-5

In de tabel hieronder is aangegeven welke paragrafen in het boek overeenkomen met de verschillende paragrafen van deze studiewijzer.

Paragraaf studiewijzer	**Paragraaf / pagina boek**
C2.1. Manipuleren van functies	-
C2.2. De grafiek en de vergelijking van een lineaire functie	§6.3- 6.4 / p.56-58
C2.3. De grafiek en de vergelijking van een gebroken lineaire functie	§8.1 / p.70 *(§8.2 / p.72)*
C2.4. De grafiek en de vergelijking van een kwadratische functie	§7.3 / p.66
C2.5. De grafiek en de vergelijking van een wortelfunctie	§9.3 / p.82

C2.1. Functies en het manipuleren van functies

In module B ben je aan de slag gegaan met formules. In module C1 met vergelijkingen. In deze module ga je aan de slag met functies.

Formule:
Een formule bestaat uit verschillende variabelen of grootheden en operatoren. Bijvoorbeeld de oppervlakte van een cirkel met straal r, kan je uitdrukken in de: πr^2.

Vergelijking:
Een vergelijking is een formule met een = teken en drukt de gelijkheid uit tussen twee uitdrukkingen die één of meerdere variabelen bevatten. Bijvoorbeeld: $20x + 5 = -35$. Hierbij is altijd sprake van minstens één onbekende. In dit geval x. De vergelijking $20x + 5 = -35$ betreft een lineaire vergelijking die je kunt oplossen. Als in het voorbeeld onder het kopje "formule" we de oppervlakte duiden met de letter "O", dan kan je dit met behulp van een vergelijking noteren, door: $O = \pi r^2$. Deze vergelijking geeft een relatie weer tussen O en r.

Functie:
Bij een functie heb je te maken met een relatie waarbij bij een bepaalde waarde van x, precies één bepaalde uitkomst hoort. Dit wordt meestal genoteerd als f(x). Hiermee wordt bedoeld dat f een functie is van x. Oftewel: f(x) is de uitkomst, als je een waarde invult voor x. Je kunt de vergelijking $O = \pi r^2$, schrijven als functie $O(r) = \pi r^2$

Voorbeelden van functievoorschriften zijn:
- $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (dit betreft een derdegraads functie)
- $g(x) = 3x + 2$ (dit betreft een lineaire functie)
- $h(x) = \frac{-7x+2}{x-4}$ (dit betreft een gebroken lineaire functie)
- $i(x) = 4x^2 + 24x + 36$ (dit betreft een kwadratische functie)
- $j(x) = \sqrt{x + 5}$ (dit betreft een wortelfunctie)
- $k(x) = 2\sin(x - 2) + 4$ (dit betreft een sinusfunctie)
- $l(x) = -2\cos(x + 1) - 2$ (dit betreft een cosinusfunctie)

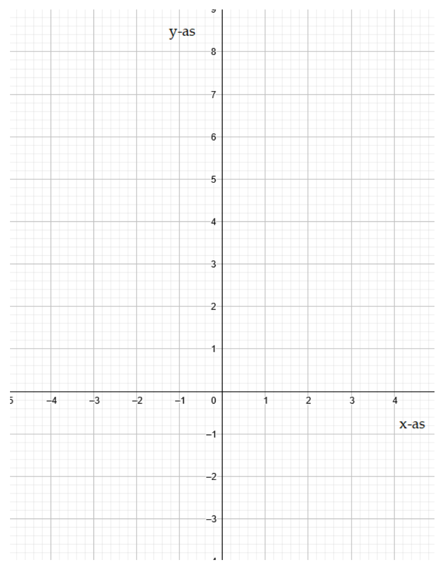
De bovenste 5 soorten functies zullen we in deze module verder behandelen.
De sinusfunctie en cosinusfunctie worden verder behandeld in module E2 Goniometrie.

We gaan nu de derdegraads functie $f(x) = x^3 - 3x + 1$, verder bekijken.

- Als x is 0, geldt $f(0) = 0^3 - (3*0) + 1 = 1$. Als x is 1, geldt $f(1) = 1^3 - (3*1) + 1 = -1$. Als x is 2, geldt $f(2) = 2^3 - (3*2) + 1 = 3$. Etc..

Bij een functie kan je een grafiek tekenen. De invoerwaarden (x) komen op de horizontale as, de x-as. De uitkomsten heten de functiewaarden en deze komen op de y-as. In het geval van bovenstaande functie $f(x) = x^3 - 3x + 1$, geldt voor de invoerwaarde van 0 voor x, dat de functiewaarde f(0), gelijk is aan 1, aangezien $0^3 - (3*0) + 1 = 1$ (punt A). Voor de invoerwaarde van 1 voor x, geldt een functiewaarde f(1), van -1 (punt B). Voor de invoerwaarde van 3 voor x, geldt een functiewaarde f(3), van 3 (punt C). De drie punten die hiermee zijn ontstaan, wordt genoteerd als:

- A(0,1), B(1, -1), C(2, 3).

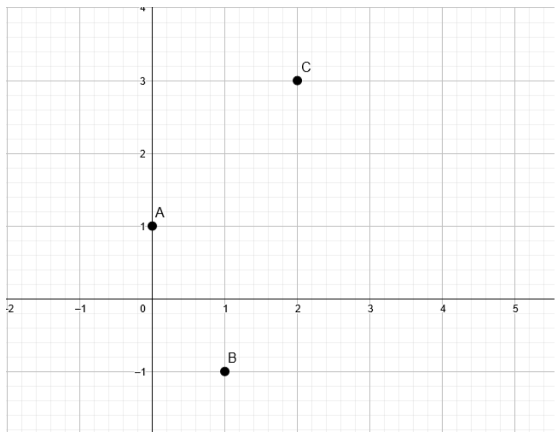


Deze drie punten kan je in een assenstelstel weergeven. In de afbeelding rechts, zien we een *rechthoekig* assenstelsel: de horizontale lijn wordt de *x*-as genoemd en de verticale lijn de y-as. Door deze twee loodrechte lijnen, het zogenaamde cartesische assenstelsel, kan de positie van ieder willekeurig punt in het platte vlak vastgelegd worden.
x is de onafhankelijke variabele (uit het domein) en mag je zelf kiezen.
y (het bereik) is de afhankelijke variabele en wordt bepaald door x en het functievoorschrift.

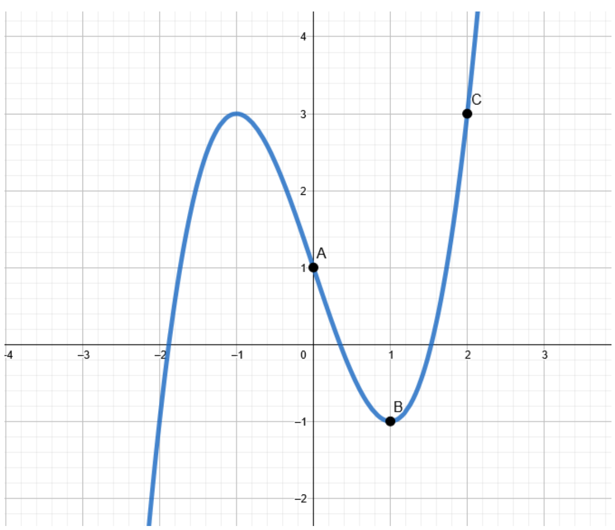
Zo kunnen we de punten A, B en C zoals hierboven bepaald, aangeven in dit assenstelstel. De positie van punt A kan gevonden worden door allereerst vanuit de oorsprong 0 eenheden naar rechts te gaan (dan heb je het punt 0 op de x-as bereikt). Men zegt dan dat A een x-coördinaat ter waarde 0 heeft. Dan 1 eenheid omhoog; men zegt dan dat A de y-coördinaat 1 heeft. Je kan ook eerst vanuit de oorsprong 1 omhoog gaan en daarna 0 naar rechts. Dan kom je toch op hetzelfde punt A uit. Dus het eerste getal tussen haakjes stelt de x-coördinaat voor en het tweede getal de y-coördinaat.

De positie van punt B kan gevonden worden door allereerst vanuit de oorsprong 1 eenheid naar rechts te gaan (dan heb je het punt 1 op de x-as bereikt). B heeft dus een x-coördinaat ter waarde 1 heeft. Dan 1 eenheid omlaag; B heeft de y-coördinaat -1.

De positie van punt C kan gevonden worden door allereerst vanuit de oorsprong 2 eenheden naar rechts te gaan (dan heb je het punt 2 op de x-as bereikt). C heeft dus een x-coördinaat ter waarde 2 heeft. Dan 3 eenheden omhoog; C heeft de y-coördinaat 3.



In feite krijg je door de gegeven functie een oneindige verzameling van punten. Hiervan hebben we nu punt A, B en C uitgetekend. Helder is dat alle punten een x-coördinaat en y-coördinaat hebben. Als we alle punten van de functie zouden uittekenen, krijgen we de kromme zoals hieronder getoond. De vergelijking is nu $y = x^3 - 3x + 1$. Een grafiek is dus een plaatje van de functie $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ook wel weergegeven als $y= f(x)$.



In de grafiek kan je een functie herkennen doordat elke verticale lijn de grafiek maximaal een keer snijdt. Hierbij geldt dat x de onafhankelijke variabele en f(x) de afhankelijke variabele is. In plaats van f(x), worden ook vaak g(x) en h(x) gebruikt. De verzamelingen van alle toegestane waarden van x noemen we het domein. De verzameling van alle mogelijke uitkomsten f(x) noemen we het bereik.

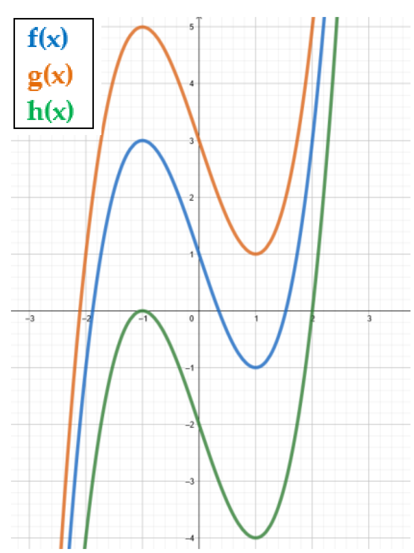
<u>Manipuleren van een functie:</u>

Met "het manipuleren van functies" wordt bedoeld dat een bepaalde functie wordt gegeven en dan worden een aantal manipulaties, in wisselende volgorde, op die functie uitgeoefend. Uiteindelijk verkrijg je dan een nieuwe grafiek en daarvan moet de functie bepaald worden.

We gaan de volgende manipulaties toepassen:
1) De grafiek moet een aantal eenheden naar *boven* of naar *beneden verschoven* worden.
2) De grafiek moet een aantal eenheden naar *links* of naar *rechts verschoven* worden.
3) De grafiek moet t.o.v. de x-as *uitgerekt* of *samengedrukt* worden.
4) De grafiek moet t.o.v. de y-as *smaller* of *breder* worden.
5) De grafiek moet *gespiegeld* worden t.o.v. de x-as.
6) De grafiek moet *gespiegeld* worden t.o.v. de y-as.

De toepassing van deze manipulaties is bij alle functies die we behandelen in de volgende paragrafen gelijk. In deze paragraaf zullen we toelichten wat het effect van deze manipulaties is bij een derdegraads functie. Als uitgangspunt nemen we steeds de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x + 1$, welke in de afbeeldingen is weergegeven met de blauwe lijn.

1) De grafiek moet een aantal eenheden naar boven of naar beneden verschoven worden.



Als we de grafiek een aantal eenheden **<u>omhoog</u>** willen verplaatsen, moet de y veranderen. Bijvoorbeeld 2 eenheden omhoog geeft $y = f(x) + 2$. De nieuwe functie is dan: $g(x) = x^3 - 3x + 1 + 2$, oftewel: $g(x) = x^3 - 3x + 3$ (oranje lijn).

Als we de grafiek een aantal eenheden **<u>omlaag</u>** willen verplaatsen, moet de y ook veranderen. Bijvoorbeeld 3 eenheden omlaag geeft $y = f(x) - 3$. De nieuwe functie

is dan: $h(x) = x^3 - 3x + 1 - 3$, oftewel:
$h(x) = x^3 - 3x - 2$ (groene lijn).

Even controleren:

We pakken een willekeurige waarde van x.

Voor $x = 1$ wordt $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 1^3 - 3*1 + 1 = -1$

Voor $x = 1$ wordt $g(x) = x^3 - 3x + 3 = 1^3 - 3*1 + 3 = 1$.

Voor $x = 1$ wordt $h(x) = x^3 - 3x - 2 = 1^3 - 3*1 - 2 = -4$.

Bij dezelfde x-waarde wordt een y-waarde bereikt die 2 hoger is voor g(x) t.o.v. f(x). Dus de grafiek is 2 eenheden omhoog geschoven.

Bij dezelfde x-waarde wordt een y-waarde bereikt die 3 lager is voor h(x) t.o.v. f(x). Dus de grafiek is 3 eenheden omlaag geschoven.

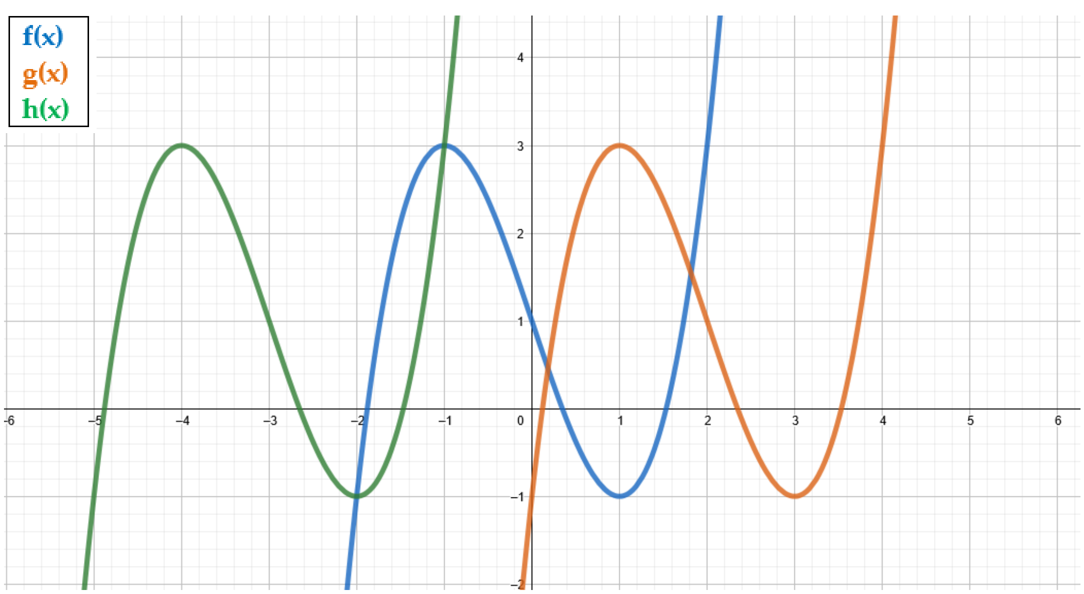
Conclusie: Bij het omhoog/omlaag verplaatsen van een grafiek, passen we toe:

- **Een grafiek k eenheden naar boven verplaatsen → vervang dan y door f(x) + k.**
- **Een grafiek k eenheden naar beneden verplaatsen → vervang dan y door f(x) – k.**

2) *De grafiek moet een aantal eenheden naar links of naar rechts verschoven worden.*

Als we de grafiek een aantal eenheden naar **<u>rechts</u>** willen verplaatsen, moet de x veranderen. Bijvoorbeeld 2 eenheden naar rechts geeft $y = f(x - 2)$. De nieuwe functie is dan: $g(x) = (x - 2)^3 - 3(x - 2) + 1$, oftewel: $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 3x + 6 + 1$, oftewel: $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ (oranje lijn).

Als we de grafiek een aantal eenheden naar **<u>links</u>** willen verplaatsen, moet de x veranderen. Bijvoorbeeld 3 eenheden naar links geeft $y = f(x + 3)$. De nieuwe functie is dan: $h(x) = (x + 3)^3 - 3(x + 3) + 1$, oftewel: $h(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 3x - 9 + 1$, oftewel: $h(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 19$ (groene lijn).



Even controleren:
We pakken weer $x = 1$ als willekeurige waarde van x, voor de grafiek van f(x).
Voor de grafiek van g(x), pakken we $x = 3$, (i.v.m. de verschuiving van 2 naar rechts).
Voor de grafiek van h(x), pakken we $x = -2$, (i.v.m. de verschuiving van 3 naar links).

Voor $x = 1$ wordt $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 1^3 - 3 * 1 + 1 = -1$
Voor $x = 3$ wordt $g(x) = (x - 2)^3 - 3x + 7 = (3 - 2)^3 - 3 * 3 + 7 = -1$.
Voor $x = -2$ wordt $h(x) = (x + 3)^3 - 3x - 8 = (-2 + 3)^3 - 3 * 2 - 8 = -1$.

Bij een verschil van 2 tussen de x-waarde voor g(x) t.o.v. f(x), is de y-waarde gelijk. Dus de grafiek is 2 eenheden naar rechts geschoven.

Bij een verschil van -3 tussen de x-waarde voor g(x) t.o.v. h(x), is de y-waarde gelijk. Dus de grafiek is 3 eenheden naar links geschoven.

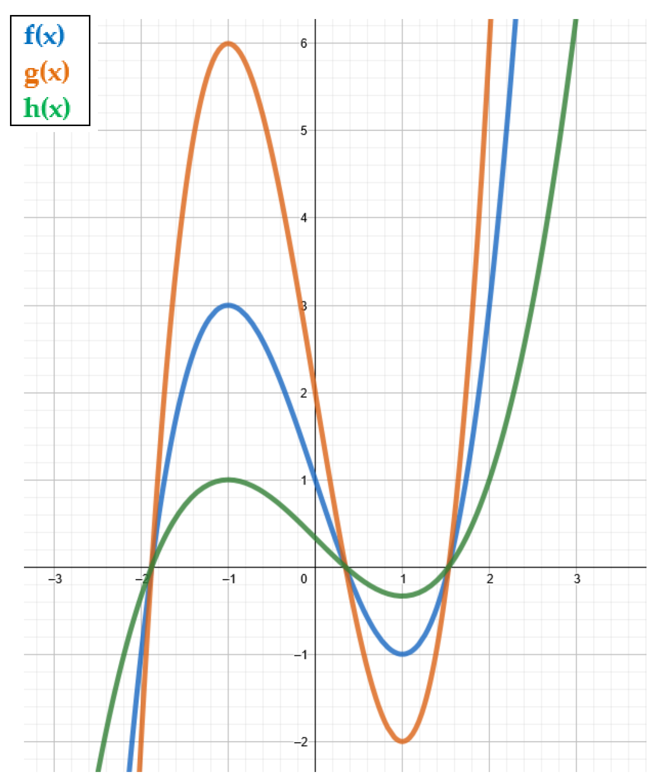
Conclusie: Bij het naar links/rechts verplaatsen van een grafiek, passen we toe:
- **Een grafiek k eenheden naar rechts verplaatsen → vervang dan x door (x – k).**
- **Een grafiek k eenheden naar links verplaatsen → vervang dan x door (x + k).**

3) *De grafiek moet t.o.v. de x-as uitgerekt of samengedrukt worden.*

In de afbeelding rechts is $f(x) = x^3 - 3x + 1$, opnieuw weergegeven met de blauwe lijn.

Als we de grafiek t.o.v. de x-as <u>**uit willen rekken**</u>, oftewel, groter willen maken, moet de y veranderen. Bijvoorbeeld 2x zo groot geeft $y = 2 * f(x)$. De nieuwe functie is dan: $g(x) = 2(x^3 - 3x + 1)$, oftewel: $g(x) = 2x^3 - 6x + 2$ (oranje lijn).

Als we de grafiek t.o.v. de x-as <u>**samen willen drukken**</u>, oftewel kleiner willen maken, moet de y ook veranderen. Bijvoorbeeld 3x zo klein geeft $y = \frac{1}{3} * f(x)$. De nieuwe functie is dan: $h(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x + 1)$, oftewel: $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{3}$ (groene lijn).



Even controleren:
We pakken als willekeurige waarde van x weer x = 1.
Voor x = 1 wordt $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 1^3 - 3 * 1 + 1 = -1$
Voor x = 1 wordt $g(x) = 2x^3 - 6x + 2 = 2*1^3 - 6*1 + 2 = -2$.
Voor x = 1 wordt $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} * 1^3 - 1 + \frac{1}{3} = + - \frac{1}{3}$.

Bij dezelfde x-waarde wordt een y-waarde bereikt die tweemaal zo ver bij de x-as vandaan is voor g(x) t.o.v. f(x). Dus de grafiek is tweemaal uitgerekt t.o.v. de x-as.

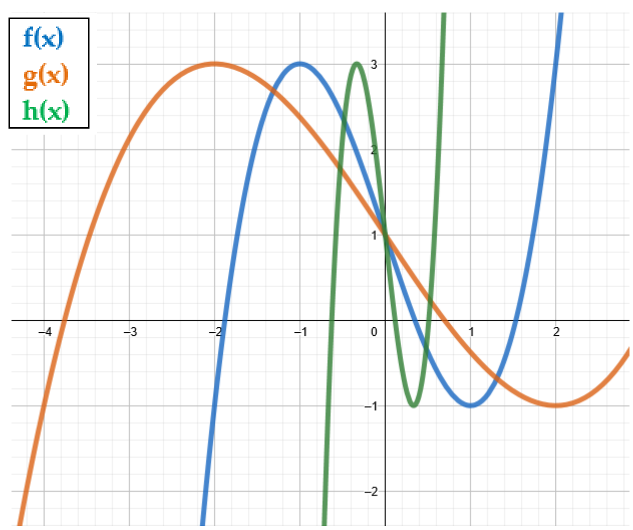
Bij dezelfde x-waarde wordt een y-waarde bereikt die driemaal dichterbij de x-as vandaan is voor h(x) t.o.v. f(x). Dus de grafiek is driemaal samengedrukt t.o.v. de x-as.

Conclusie: Bij het uitrekken/samendrukken t.o.v. de x-as van een grafiek, passen we toe:
- **Een grafiek k eenheden uitrekken t.o.v. de x-as → vervang dan y door k*f(x).**
- **Een grafiek k eenheden samendrukken t.o.v. de x-as → vervang dan y door $\frac{1}{k} * f(x)$.**

4) *De grafiek moet t.o.v. de y-as smaller of breder worden.*

Als we de grafiek t.o.v. de y-as **breder willen maken**, moet de x veranderen.
Bijvoorbeeld 2x zo breed geeft $y = f(\frac{1}{2}x)$.
De nieuwe functie is dan: $g(x) = (\frac{1}{2}x)^3 - 3(\frac{1}{2}x) + 1$,
oftewel: $g(x) = (\frac{1}{2}x)^3 - \frac{3}{2}x + 1$ (oranje lijn).

Als we de grafiek t.o.v. de y-as **smaller willen maken**, moet de x veranderen.
Bijvoorbeeld 3x zo smal geeft y = f(3x).
De nieuwe functie is dan: $h(x) = (3x)^3 - 3(3x) + 1$,
oftewel: $h(x) = 27x^3 - 9x + 1$ (oranje lijn).



Even controleren:
We pakken weer x = 1 als willekeurige waarde van x, voor de grafiek van f(x).
Voor de grafiek van g(x), pakken we x = 2, (i.v.m. de verbreding van 2).
Voor de grafiek van h(x), pakken we $x = \frac{1}{3}$, (i.v.m. de versmalling van 3).

Voor $x = 1$ wordt $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 1^3 - 3 * 1 + 1 = -1$
Voor $x = 2$ wordt $g(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = \frac{1}{8} * 2^3 - \frac{3}{2} * 2 + 1 = -1$.
Voor $x = \frac{1}{3}$ wordt $h(x) = 27x^3 - 9x + 1 = 27 * \frac{1}{3}^3 - 9x + 1 = -1$.

Bij een tweemaal zo grote waarde van x bij de functie g(x) t.o.v. de functie f(x), is de y-waarde gelijk. Dus de grafiek is t.o.v. de y-as tweemaal breder geworden.

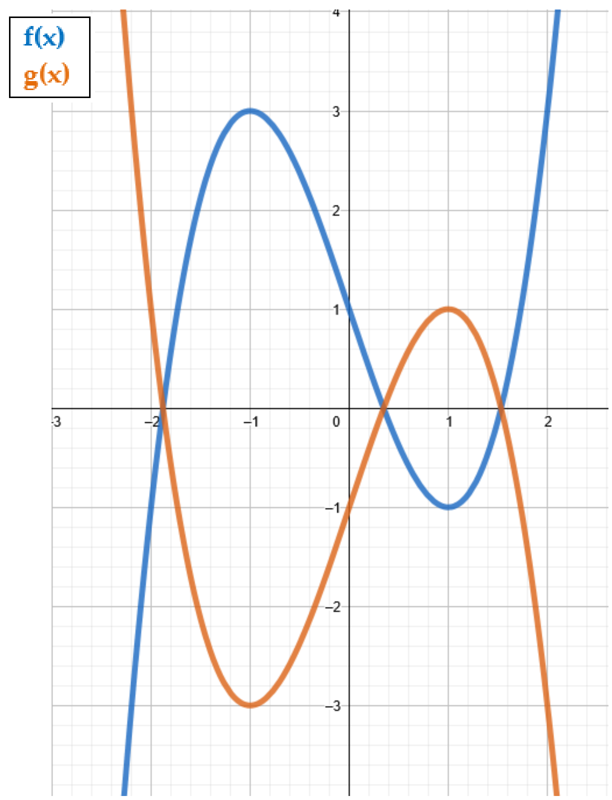
Bij een driemaal zo kleine waarde van x bij de functie h(x) t.o.v. de functie f(x), is de y-waarde gelijk. Dus de grafiek is t.o.v. de y-as driemaal smaller geworden.

Conclusie: Bij het breder/smaller maken t.o.v. de y-as van een grafiek, passen we toe:

- **Een grafiek k eenheden breder maken t.o.v. de y-as → vervang dan x door $(\frac{1}{k} * x)$.**
- **Een grafiek k eenheden smaller maken t.o.v. de y-as → vervang dan x door $(k * x)$.**

5) *De grafiek moet gespiegeld worden t.o.v. de x-as.*

Als we de grafiek t.o.v. de x-as willen **<u>spiegelen</u>**, moet de y veranderen.
Een spiegeling geeft als resultaat $y = -f(x)$.
De nieuwe functie is dan: $g(x) = -(x^3 - 3x + 1)$,
oftewel: $g(x) = -x^3 + 3x - 1$ (oranje lijn).



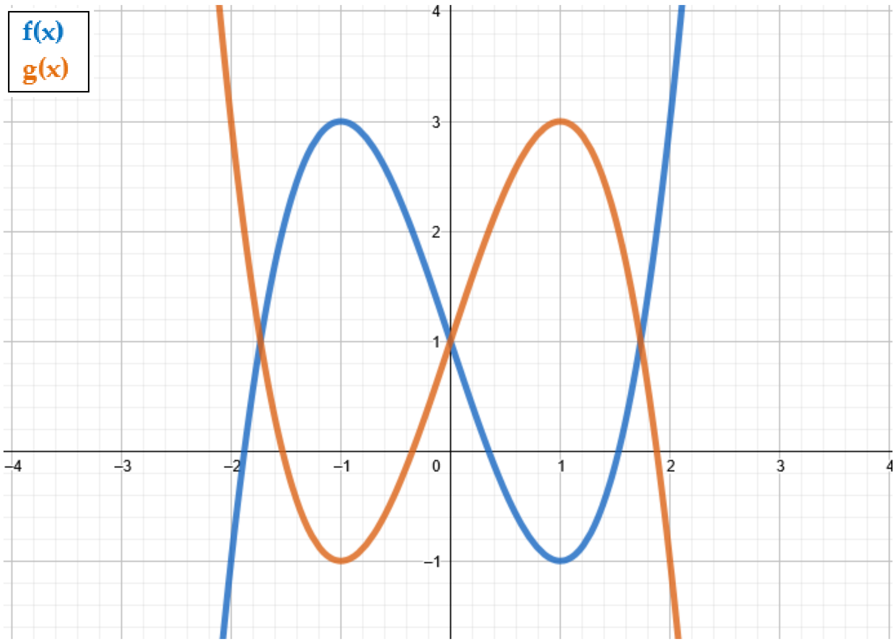
Even controleren:
We pakken als willekeurige waarde van x weer $x = 1$.
Voor $x = 1$ wordt $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 1^3 - 3 * 1 + 1 = -1$
Voor $x = 1$ wordt $g(x) = -x^3 + 3x - 1 = -1^3 + 3 * 1 - 1 = 1$.

Bij dezelfde x-waarde wordt een y-waarde bereikt die voor g(x) tegenovergesteld is t.o.v. f(x).
Dus de grafiek gespiegeld t.o.v. de x-as.

Conclusie: Spiegelen t.o.v. de x-as betekent de functie qua teken laten omdraaien

6) *De grafiek moet gespiegeld worden t.o.v. de y-as.*

Als we de grafiek t.o.v. de y-as willen **spiegelen**, moet de x veranderen. Een spiegeling geeft als resultaat y = f(-x). De nieuwe functie is dan: $g(x) = ((-x)^3 - 3(-x) + 1)$, oftewel: $g(x) = -x^3 + 3x + 1$ (oranje lijn).



Even controleren:
We pakken weer x = 1 als willekeurige waarde van x, voor de grafiek van f(x).
Voor de grafiek van g(x), pakken we x = -1, (i.v.m. de spiegeling door de y-as).

Voor x = 1 wordt $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 1^3 - 3^* 1 + 1 = -1$
Voor x = -1 wordt $g(x) = -x^3 + 3x + 1 = -(-1^3) + 3^*-1 + 1 = -1$.

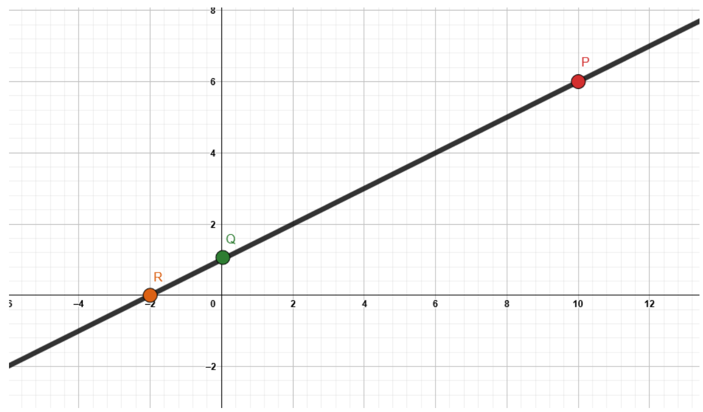
Bij een tegenovergestelde x-waarde voor de functie van g(x) t.o.v. de functie f(x) wordt dezelfde y-waarde bereikt. Dus de grafiek gespiegeld t.o.v. de y-as.

Spiegelen t.o.v. de y-as betekent in het functievoorschrift x door – x vervangen.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

C2.2. De grafiek en de vergelijking van een lineaire functie.

In deze paragraaf worden drie methoden behandeld om uit de grafiek van een rechte lijn de bijbehorende algebraïsche vergelijking van die rechte lijn te bepalen. We beginnen met een concreet voorbeeld van een grafiek van een rechte lijn. Zie de grafiek in de afbeelding rechts:



We zien dat punt P als x-coördinaat 10 heeft en als y-coördinaat 6. Dit noteren we als P(10, 6). We zien verder dat het punt P op een rechte lijn ligt. Deze lijn gaat behalve door P(10, 6) ook bijvoorbeeld door Q(0, 1) en R(-2, 0). Het punt R is het snijpunt van de lijn met de x-as en punt Q is het snijpunt van de lijn met de y-as.

In feite kan men deze lijn opvatten als een oneindige verzameling van punten. Helder is dat alle punten een x-coördinaat en y-coördinaat hebben. Wat de punten op deze lijn nu gemeenschappelijk hebben is dat voor al deze punten dezelfde relatie tussen de x-waarde en y-waarde bestaat, namelijk:

Indien je de *x*-coördinaat door 2 deelt en je telt er daarna 1 bij op, dan krijg je de y-coördinaat.

Er geldt dus: $\boxed{\mathbf{y = \tfrac{1}{2}x + 1}}$

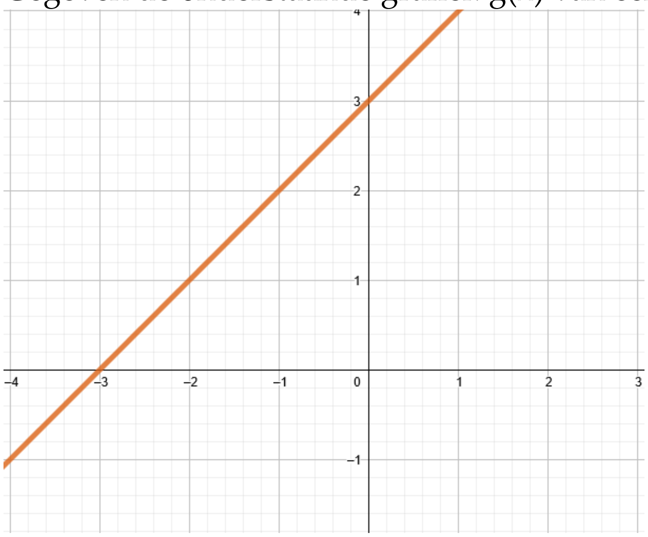
De bovenstaande uitdrukking wordt de (algebraïsche) vergelijking van de rechte lijn genoemd. Het woord vergelijking is geen slecht woord: van ieder punt wordt y vergeleken met ½x + 1 en telkens blijken dan y en ½ x +1 gelijk aan elkaar te zijn. Je ziet hier het grote voordeel van het gebruik van letters: *je hebt nu oneindig veel punten van deze rechte lijn in slechts één enkele vergelijking samengevat.*

Er zijn meerdere methoden beschikbaar om de vergelijking van een lijn te bepalen. We beperken ons tot drie methoden. Bij deze methodes gebruiken we de volgende vergelijking van een rechte lijn: y = ax + b.

Voor de coëfficiënt a worden verschillende namen gebruikt, bijvoorbeeld: **richtingscoëfficiënt** of **helling**. De a bepaalt namelijk de stijging van de lijn (stijging y-as) als je één stapje naar rechts gaat op de x-as.

Voorbeeld 1

Gegeven de onderstaande grafiek g(x) van een rechte lijn:



Methode 1: Substitutie van de coördinaten van twee punten in de algemene vergelijking van de rechte lijn.

Doorloop de volgende stappen:

Stap 1) Bepaal de coördinaten van twee punten:

Het eerste wat onmiddellijk opvalt is, dat de lijn gaat door het punt (0, 3), het snijpunt met y-as en door het punt (-3, 0), het snijpunt met x-as.

Stap 2) Vul de coördinaten van de twee punten in, in de algemene vergelijking:

Het punt (-3, 0) ligt op de lijn, voldoet dus aan y = ax + b, dus 0 = -3a + b

Het punt (0,3) ligt ook op de lijn, dus 3 = 0*a + b

Stap 3) Bepaal a en b:

Uit de laatste vergelijking is b onmiddellijk te bepalen, namelijk b = 3. De andere vergelijking stelt dat 0 = -3a + b. Dat wordt dan dus 0 = -3a + 3. Dit geeft a = 1

Stap 4) Substitueer a en b in de algemene vergelijking:

y = ax + b, wordt in deze situatie: y = x + 3.

Methode 2: De bepaling van de waarden voor a en b rechtstreeks uit de grafiek.

Doorloop de volgende stappen:

Stap 1) Bepaal Δx.
Je beweegt je op de x-as een stukje naar rechts, bijvoorbeeld vanaf het punt (-3,0) naar de oorsprong (0,0), dan is de *verandering* in de *x*-coördinaat *positief* en gelijk aan 3. Dit wordt genoteerd als $\Delta x = 3$. Hierin is Δ het symbool voor *verandering*.

Stap 2) Bepaal Δy
Als x-waarde van -3 naar 0 loopt, dan verandert de bijbehorende y-waarde van de lijn ook. De y-waarde neemt toe van 0 tot 3, dus de verandering in y is 3, oftewel $\Delta y = 3$.

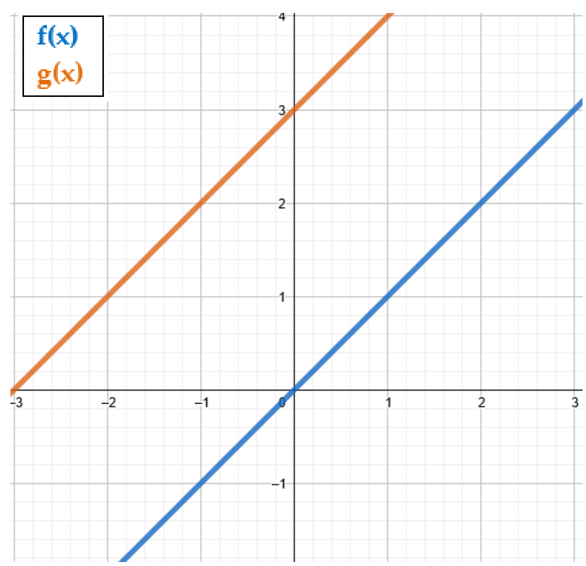
Stap 3) Bepaal a, met behulp van de formule $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Voor deze grafiek geldt dat $a = \frac{3}{3} = 1$.

Stap 4) Bepaal b door in de grafiek op de y-as de waarde van y te bepalen bij x = 0. Voor deze y-waarde kijk je op de y-as naar het snijpunt van de lijn met de y-as. Ligt het snijpunt boven de oorsprong, dan is b positief.
Ligt dit snijpunt onder de x-as, dan is b negatief. In dit geval is het snijpunt met de y-as het punt (0, 3), dus b is positief. Conclusie: b = 3.

Stap 5) Substitueer a en b in de algemene vergelijking:
$y = ax + b$, wordt in deze situatie: $y = x + 3$.

<u>*Methode 3*</u>**:** De bepaling van de functie f(x) door te bepalen welke manipulaties er hebben opgetreden t.o.v. de basisfunctie van een lineaire functie.

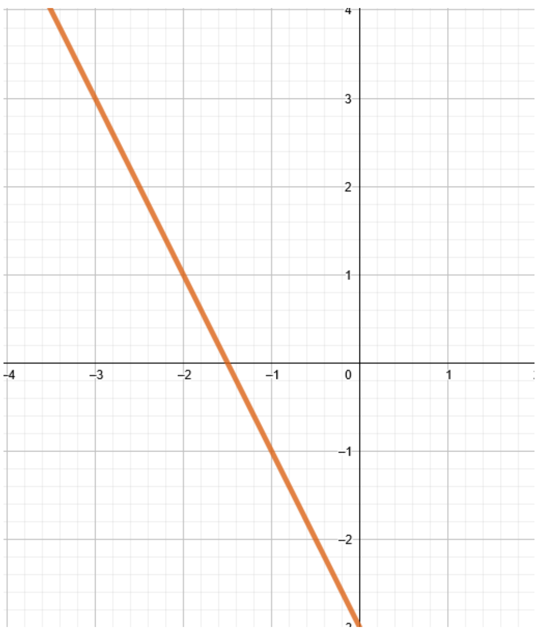
De basisfunctie van een lineaire functie is y = x.
In de afbeelding hiernaast is de grafiek van deze basisfunctie f(x) en de grafiek van g(x) afgebeeld. Het verschil tussen g(x) en f(x) is, dat de grafiek van f(x) 3 plaatsen naar boven is verschoven t.o.v. de grafiek van g(x). Hierbij kunnen we de conclusie zoals getrokken in C2.1.2. weer toepassen:



Een grafiek k eenheden naar boven verplaatsen → vervang dan y door f(x) + k.

Dus de functie van de oranje lijn is gelijk aan g(x) = x + 3.

Voorbeeld 2
Gegeven de onderstaande grafiek van een rechte lijn g(x):



Methode 1: Substitutie van de coördinaten van twee punten in de algemene vergelijking van de rechte lijn.

Doorloop de volgende stappen:
Stap 1) Bepaal de coördinaten van twee punten:
Je moet nu proberen wat in het oog springende punten te zoeken en daarvan de coördinaten te bepalen. In dit geval zijn in het oog springende punten het punt (-1.5, 0), het snijpunt met de x-as, en ook het snijpunt met de y-as, het punt (0, -3). Ook vallen de punten (-1, 1) en het punt (-½, -2) op. Voor het vervolg van dit voorbeeld maken we nu een keuze uit de punten (-1.5, 0) en (0, -3).

Stap 2) Vul de coördinaten van de twee punten in, in de algemene vergelijking:
Het punt (-1.5, 0) ligt op de lijn, voldoet dus aan y = ax + b, dus 0 = -1.5a + b
Het punt (0, -3) ligt ook op de lijn, dus -3 = 0·a + b

Stap 3) Bepaal a en b:
Uit de laatste vergelijking is b onmiddellijk te bepalen, namelijk b = -3. De andere vergelijking stelt dat 0 = -1.5a + b. Dat wordt dan dus 0 = -1.5a - 3. Dit geeft a = -2

Stap 4) Substitueer a en b in de algemene vergelijking:
y = ax + b, wordt in deze situatie: y = -2x - 3.

Methode 2: De bepaling van de waarden voor a en b rechtstreeks uit de grafiek.

Doorloop de volgende stappen:
Stap 1) Bepaal Δx.
Je beweegt weer op de x-as een stukje naar rechts, bijvoorbeeld vanaf het punt (-1½, 0) naar de oorsprong (0, 0). De *verandering* in de x-coördinaat is dan positief, want x neemt toe, en is gelijk aan 1.5. Deze verandering wordt wederom genoteerd als Δx = 1½.

Stap 2) Bepaal Δy
Als x toeneemt van -1½ tot 0, dan verandert de bijbehorende y-waarde van de lijn ook. De y-waarde daalt van 0 tot -3, dus de *verandering* in y is -3, dus Δy = -3.

Stap 3) Bepaal a, met behulp van de formule $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Voor deze grafiek geldt dat $a = \frac{-3}{1.5} = -2$

Stap 4) Bepaal b door de waarde van y te bepalen, als x = 0.
We bepalen b weer door de afstand tussen de oorsprong en het snijpunt met de y-as te vinden. Omdat dit snijpunt onder de x-as ligt, wordt deze afstand negatief gerekend, dus b = -3.

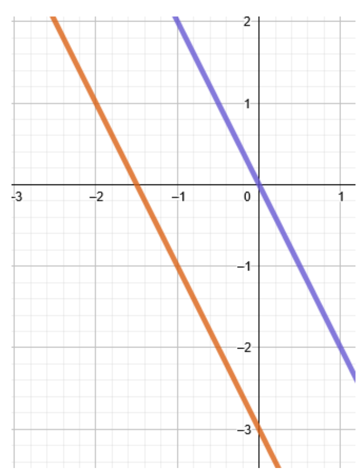
Stap 5) Substitueer a en b in de algemene vergelijking:
y = ax + b, wordt in deze situatie: y = -2x – 3.

Methode 3: De bepaling van de functie f(x) door te bepalen welke manipulaties er hebben opgetreden t.o.v. de basisfunctie van een lineaire functie.

We nemen weer als uitgangspunt y = x.
De rc is -2, dus: y = -2x.

In de afbeelding hiernaast is de grafiek van y = -2x (paars) en de grafiek van g(x) (oranje) afgebeeld.

Het verschil tussen de paarse en oranje grafiek is, dat de oranje grafiek 3 plaatsen naar beneden is verschoven.



Hierbij kunnen we de conclusie zoals getrokken in C2.1.2. weer toepassen:

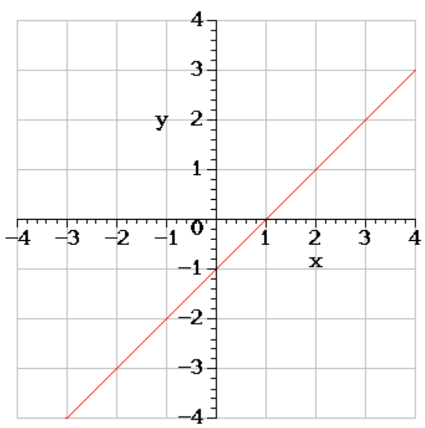
Een grafiek k eenheden naar beneden verplaatsen → vervang dan y door f(x) - k.

Dus de functie van de oranje lijn is gelijk aan g(x) = -2x - 3.

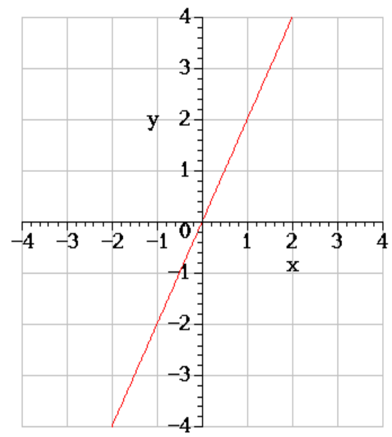
Opgave C2.2.

Bepaal de vergelijkingen van de lijnen in de onderstaande grafieken. Bepaal daarbij zelf welke methode je hiervoor gebruikt.

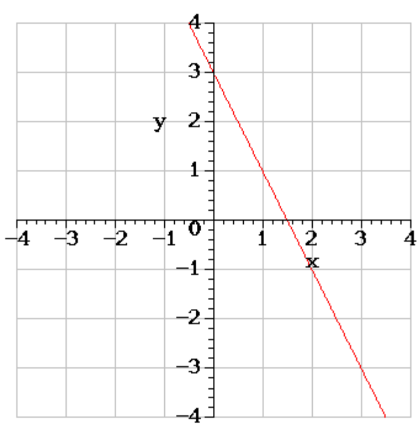
a)



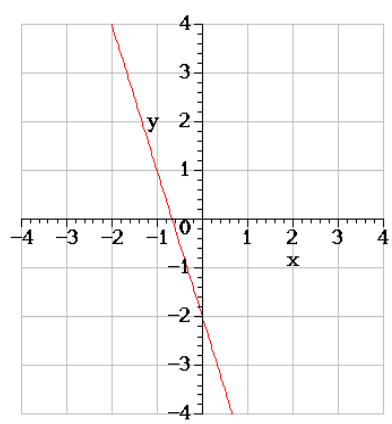
b)



c)



d)



Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

C2.3. De grafiek en de vergelijking van een gebroken lineaire functie

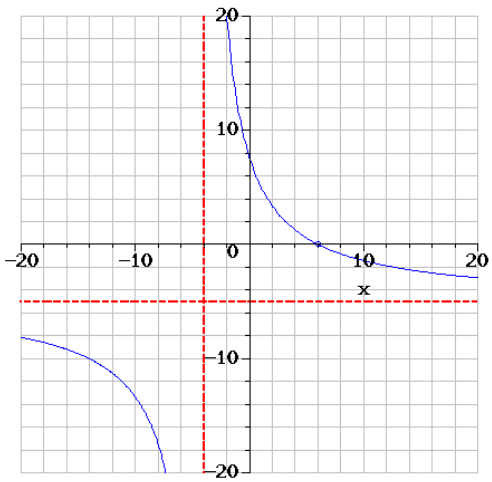
Onder gebroken lineaire functies verstaan we functies die een quotiënt zijn (het resultaat van een deling), van twee lineaire functies: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, waarin a, b, c en d constanten voorstellen. Je kunt bijvoorbeeld nemen a = -7 , b = 2 , c = 1 en d = -4. Dan ontstaat de gebroken functie:
$y = \frac{-7x+2}{x-4}$

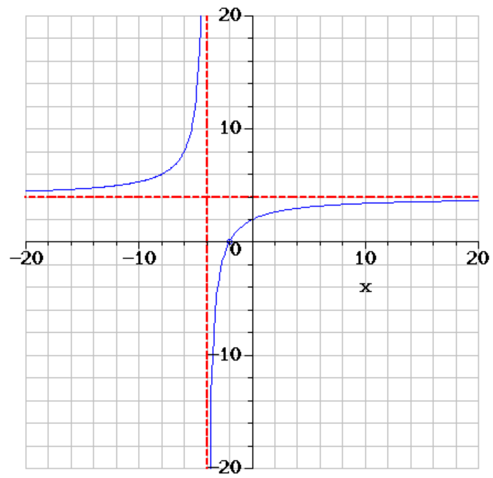
Andere voorbeelden zijn $y = \frac{x}{x-2}$ en $y = \frac{2x+4}{x}$. Deze laatste functie verkrijg je door in te vullen: a = 2, b = 4, c = 1 en d = 0.

Als je voor een gebroken lineaire functie, net als bij een lineaire functie voor alle waarden van x, de waarde van y bepaald en dit uittekent, krijg je grafieken die eruit zien zoals weergegeven in onderstaande afbeeldingen (blauwe lijn).

Dit type functie valt in één van de twee onderstaande categorieën:
categorie I: de functie is dalend

categorie II: de functie is stijgend



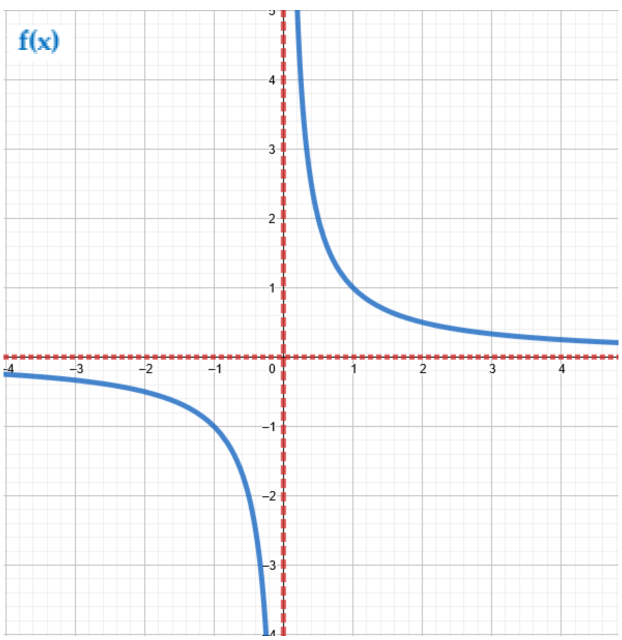


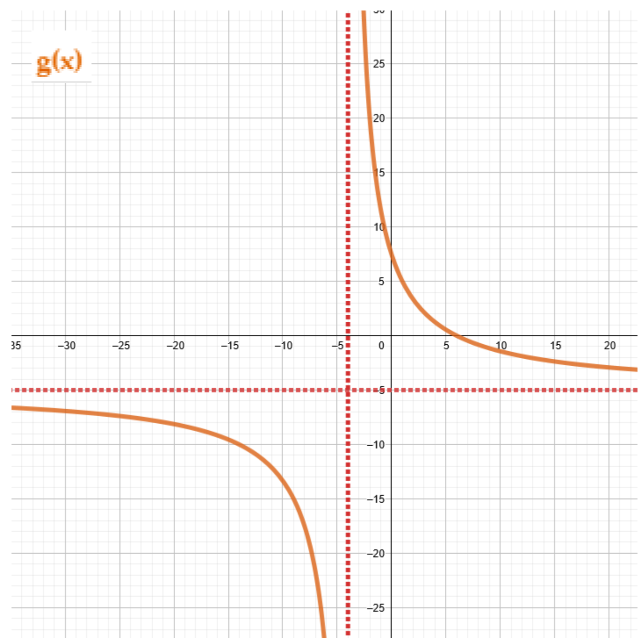
We stellen ons tot doel uit de grafieken van categorie I en II de waarden van a, b, c en d te bepalen. Dit kan op vele manieren. We behandelen in deze module 3 methoden.

Methode 1:
De bepaling van de functie f(x) door te bepalen welke manipulaties er hebben opgetreden t.o.v. de basisfunctie van een gebroken lineaire functie.

We nemen als uitgangspunt de basisfunctie van een gebroken lineaire functie: $y = \frac{1}{x}$.
Eerst is het belangrijk om de grafiek van de functie wat beter te begrijpen.

In de afbeeldingen hieronder zijn de grafieken van deze basisfunctie $f(x) = \frac{1}{x}$ (links) en de grafiek van g(x) (rechts) afgebeeld. De rode stippellijnen geven de horizontale en verticale asymptoot aan.





Bij de basisfunctie f(x) valt het op dat, als x de waarde 0 van de positieve kant nadert, dan y heel groot wordt, groter dan elk positief getal. Indien x de waarde 0 van de andere, negatieve kant nadert, wordt y zeer negatief, namelijk kleiner dan elk negatief getal. Men zegt dat y = f(x) een *verticale asymptoot* heeft voor x = 0.

Definitie
Een *verticale* asymptoot (v.a.) is een verticale lijn bij die x-waarde waar de functie steeds dichterbij komt, indien y naar plus oneindig of min oneindig loopt.

Bij de functie g(x) geldt, dat de verticale asymptoot op een andere waarde van x ligt dan bij de basisfunctie. De x-waarde waar de functie steeds dichterbij komt is met een rode verticale stippellijn aangegeven en ligt op x = -4.

Bij de basisfunctie f(x) geldt, dat als de x langs het positieve gedeelte van de x-as steeds groter wordt, of als x langs het negatieve deel van de x-as steeds kleiner wordt, dan nadert de functie tot 0. Men zegt dat y = f(x) een *horizontale asymptoot* heeft voor y = 0.

Definitie Een *horizontale* asymptoot (h.a.) is een horizontale lijn bij die y-waarde waar de functie steeds dichterbij komt, indien *x* naar plus oneindig of min oneindig loopt.

Bij de functie g(x) geldt, dat de horizontale asymptoot op een andere waarde van y ligt dan bij de basisfunctie. De y-waarde waar de functie steeds dichterbij komt is met een rode horizontale stippellijn aangegeven en ligt op x = -5.

We kunnen nu aan de hand van de theorie van manipulaties, de formule van de grafiek van g(x) bepalen.

De kruising van de horizontale en verticale asymptoot voor g(x) is dus: (-4, -5). Dit t.o.v. de kruising van (0,0) bij de basisfunctie. Dit geeft duidelijk aan dat de grafiek van g(x) dus 4 naar links en 5 naar beneden is verschoven t.o.v. de grafiek van f(x) = $\frac{1}{x}$.

Het is lastig direct uit de grafiek af te leiden hoeveel de grafiek van g(x) is uitgerekt t.o.v. de x-as als je het vergelijkt met de grafiek van f(x). Daarom noemen we de uitrekking even "a".

Nu kunnen we de getrokken conclusies m.b.t. manipulaties, zoals toegelicht in C2.1.2. toepassen:

Een grafiek k eenheden uitrekken t.o.v. de x-as → vervang dan y door k*f(x).

Voor een uitrekking van a geldt daarom: y = a * $\frac{1}{x} = \frac{a}{x}$.

Een grafiek k eenheden naar links verplaatsen → vervang dan x door (x + k).

Voor de verschuiving van 4 naar links geldt daarom: y = $\frac{a}{(x+4)}$.

Een grafiek k eenheden naar beneden verplaatsen → vervang dan y door f(x) - k.

Voor de verschuiving van 5 naar beneden, geldt daarom: y = $\frac{a}{(x+4)} - 5$.

Door nu een specifiek punt op de grafiek uit te kiezen en de coördinaten van x en y in te vullen in de gekregen functie, kan je a bepalen. Bijvoorbeeld punt (6,0).

- $0 = \frac{a}{(6+4)} - 5$, dus: $0 = \frac{a}{10} - 5$, dus: $5 = \frac{a}{10}$, dus a = 50.

- Let op: Als a een negatieve waarde heeft, geeft dit aan dat de grafiek is gespiegeld. In dit voorbeeld is er dus geen sprake van spiegeling.

We vullen vervolgens a in, in de gekregen formule:

- $y = \frac{50}{(x+4)} - 5$.

Als we hier één breuk van maken, geldt:

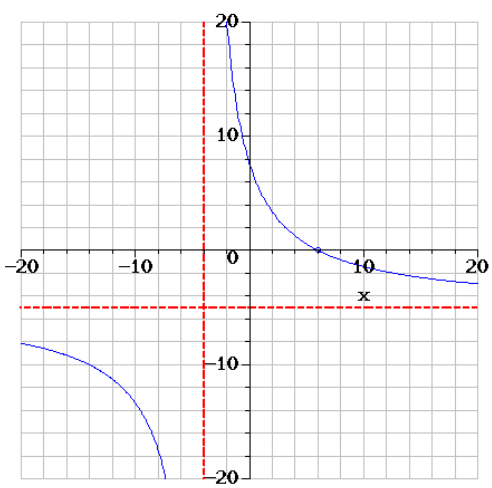
$$y = \frac{50}{(x+4)} - 5 = y = \frac{50}{(x+4)} - \frac{5*(x+4)}{(x+4)} = \frac{50}{(x+4)} - \frac{5x+20}{(x+4)} = \frac{50-5x-20}{(x+4)} = \frac{-5x+30}{(x+4)}.$$

Methode 2:

We zullen de algebraïsche formules bepalen via het nalopen van een viertal bekende *kenmerken*.

We nemen weer als uitgangspunt $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

We beginnen met onderstaand voorbeeld, waarvoor geldt : ad – bc < 0.



Het valt op dat, als x de waarde -4 van de positieve kant nadert, dan y heel groot wordt, groter dan elk positief getal. Indien x de waarde -4 van de andere, negatieve kant nadert, wordt y zeer negatief, namelijk kleiner dan elk negatief getal. Men zegt dat y = f(x) een *verticale asymptoot* heeft voor x = -4.

Definitie
Een *verticale* asymptoot (v.a.) is een verticale lijn bij die x-waarde waar de functie steeds dichterbij komt, indien y naar plus oneindig of min oneindig loopt.

Anders gezegd: De verticale asymptoot geeft de verticale lijn x = a weer waar de grafiek zeer dicht nadert in oneindig en/of min oneindig. In dit geval x = -4. Het feit dat de functie zeer grote waarden aanneemt vlakbij x = -4, komt doordat we te maken hebben met een breuk ($y = \frac{ax+b}{cx+d}$). Het kenmerk van een breuk is, dat de noemer geen 0 kan zijn. De noemer kan wel steeds kleiner worden en richting 0 gaan. Hoe kleiner het getal is waardoor je deelt, hoe groter de uitkomst. Voor deze grafiek geldt dat de noemer (cx + d), gelijk aan 0 is, als x = -4.

Daarom geldt algemeen: Een *verticale asymptoot* (v.a.) is een verticale lijn bij die x-waarde waarvoor de noemer nul wordt en waarvoor de teller ongelijk aan nul is, oftewel: cx + d = 0, oftewel: x = $-\frac{d}{c}$

Kenmerk 2: de horizontale asymptoot
Als bij deze functie de x langs het positieve gedeelte van de x-as steeds groter wordt, of als x langs het negatieve deel van de x-as steeds kleiner wordt, dan nadert de functie tot -5. Men zegt dat y = f(x) een *horizontale asymptoot* heeft voor y = -5.

Definitie Een *horizontale* asymptoot (h.a.) is een horizontale lijn bij die y-waarde waar de functie steeds dichterbij komt, indien *x* naar plus oneindig of min oneindig loopt.

In voorbeeld I nadert y de waarde -5 als x zich in beide richtingen ver van de oorsprong verwijdert. Als x deze zeer grote waarden aanneemt, dan kunnen in de teller ax + b en in de noemer cx + d de termen b en d verwaarloosd worden. Dit kan het beste inzichtelijk worden gebracht door de teller en noemer van de algemene functie door x te delen: $y = \frac{(ax+b)/x}{(cx+d)/x} = \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}$.
Vervolgens moet je voorstellen dat het getal x zich langs de positieve x-as beweegt en wel steeds verder weg van de oorsprong. Je mag trouwens je evengoed voorstellen dat x zich langs de negatieve x-as beweegt en dan ook steeds verder weg van de oorsprong gaat. In beide situaties worden in de functie y de term $\frac{b}{x}$ in de teller en de term $\frac{d}{x}$ in de noemer steeds kleiner en kleiner. Ze krimpen in tot nul, en de teller van y zal steeds dichter tot de waarde a naderen en de noemer van y zal steeds dichter tot de waarde c

naderen. Dus de functie y nadert steeds dichter tot de waarde $\frac{a}{c}$. De horizontale lijn y = -5 is dus de lijn waartoe de functie y steeds dichter nadert als x zich steeds verder van de oorsprong verwijdert, echter zonder dat de functie ooit deze lijn zal raken. Men zegt dan: de horizontale asymptoot is de lijn y = -5.

De vergelijking van de horizontale asymptoot is dan dus $y = \frac{a}{c} = -5$. Dit geeft a = -5c.

Kenmerk 3: het snijpunt met de x-as.

Definitie De x-coördinaat van het *snijpunt met de x-as* is die x-waarde, waarvoor geldt dat f(x) = 0.

In ons voorbeeld is f(x) = 0 als x = 6. We schrijven ook S_x (6, 0).
f(x) = 0, als de teller uit de vergelijking $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gelijk is aan 0.
Dus: ax + b = 0. Dit geeft: 6a + b = 0.

Kenmerk 4: het snijpunt met de y-as.

Definitie De y-coördinaat van het *snijpunt met de y-as* is de y-waarde voor x = 0.

Als x = 0, wordt de vergelijking $y = \frac{a*0+b}{c*0+d}$, oftewel: $y = \frac{b}{d}$
In ons voorbeeld geldt dat bij een waarde van x = 0, y gelijk is aan 7,5. De vergelijking wordt dan: $7{,}5 = \frac{b}{d}$. Zorg dat je één onbekende hebt aan elke kant: dus b = 7,5d.

Combineren kenmerken: a, b, c en d oplossen met behulp van de vier gecreëerde formules.

$$\begin{aligned} -4c + d &= 0 \\ a &= -5c \\ 6a + b &= 0 \\ b &= 7{,}5d \end{aligned}$$

Om dit op te kunnen lossen kan je een willekeurig getal toewijzen aan a, b, c of d. Daarna kan je de andere drie uitrekenen. Je kan zelf bepalen of dit a, b, c, of d is, en welke waarde dat is.

Mogelijkheid 1:
Stel we geven c de waarde 1 → c = 1.
Nu we c weten, kunnen we a en d bepalen:

- Voor a geldt: a = -5c → a = -5 * 1 → a = -5.
- Voor d geldt: -4c + d = 0 → d = 4c → d = 4 * 1 = 4

Nu we d weten kunnen we b bepalen:

- b = 7,5 * d → b = 7,5 * 4 = 30.

We krijgen dan de volgende vergelijking $y = \frac{-5x+30}{x+4}$.

Mogelijkheid 2:
Stel we geven a de waarde 1 → a = 1.
Nu we a weten, kunnen we b en c bepalen:

- Voor b geldt: 6a + b = 0 → b = -6a → b = -6 * 1 = -6.
- Voor c geldt: a = -5c → c = $\frac{a}{-5}$ → c = $\frac{1}{-5}$ → -$\frac{1}{5}$

Nu we b weten kunnen we d bepalen:

- b = 7,5 * d → -6 = 7,5 * d → d = $\frac{-6}{7,5}$ → d = $\frac{-12}{15}$ → d = $\frac{-4}{5}$

We krijgen dan de volgende vergelijking $y = \frac{x-6}{-\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}}$

Wat opvalt is dat we bij mogelijkheid 1 en 2 verschillende vergelijkingen krijgen. Toch horen ze beide bij dezelfde grafiek. Als je in het rechterlid van de vergelijking van mogelijkheid 2 zowel de teller als de noemer met -5 vermenigvuldigt, krijg je de vergelijking van mogelijkheid 1:

$$y = \frac{x-6}{-\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}} \cdot \frac{-5}{-5} = \frac{-5(x-6)}{-5(-\frac{1}{5}x - \frac{4}{5})} = \frac{-5x+30}{x+4}$$

Dit verklaart waarom je willekeurig een getal kan kiezen voor a, b, c of d. Dit komt doordat de verhouding van a,b,c en d ten opzichte van elkaar hetzelfde is.

<u>*Methode* 3:</u>
We gaan van een grafiek van een gebroken lineaire functie de algebraïsche vergelijking van die functie bepalen door gebruik te maken van de formule:

$$\boxed{y = h \cdot \left(\frac{x+b}{x-v}\right)}$$

Waarbij:

- h = de y-waarde van de horizontale asymptoot;
- v = de x- waarde van de verticale asymptoot;
- b = een constante die je bepaalt door een handig punt in deze vergelijking te substitueren, bijvoorbeeld het snijpunt met de x-as of de y-as.

Merk op dat bovenstaande uitdrukking verkregen is door een herschrijving van $y = \frac{\mathrm{a}x+\mathrm{b}}{\mathrm{c}x+\mathrm{d}}$:

$$\frac{\mathrm{a}x+\mathrm{b}}{\mathrm{c}x+\mathrm{d}} = \frac{a(x+\frac{b}{a})}{c(x+\frac{d}{c}\ )} = \frac{a}{c} \cdot (\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}})$$

Zoals we eerder gezien hebben, is de horizontale asymptoot gelijk aan $y = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$ en de verticale asymptoot x = - $\frac{d}{c}$

Stap 1) Bepaal h en vul deze in, in bovenstaande formule.
In ons geval vullen we h = -5 in. Dit geeft $\mathrm{y} = -5 \cdot \left(\frac{\mathrm{x+b}}{\mathrm{x-v}}\right)$

Stap 2) Bepaal v en vul deze in, in bovenstaande formule.
In ons geval vullen we v = --4 in. Je krijgt $\mathrm{y} = -5 \cdot \left(\frac{\mathrm{x+b}}{\mathrm{x+4}}\right)$

Stap 3) Bepaal b, door een handig punt van de grafiek in deze vergelijking te substitueren.
Vul bijvoorbeeld het snijpunt met de x-as in: x = 6 en y = 0, dit geeft $0 = -5 \cdot \left(\frac{6+\mathrm{b}}{10}\right)$.
Dan moet dus gelden b = -6.

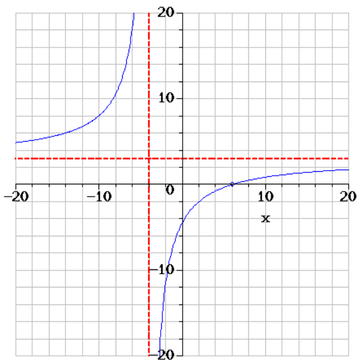
Stap 4) Bepaal het eindresultaat door h, b en v in te vullen in de formule.
Het eindresultaat wordt nu weer $\mathrm{y} = \frac{-5\mathrm{x}+30}{\mathrm{x}+4}$.

Opgave C2.3.1.

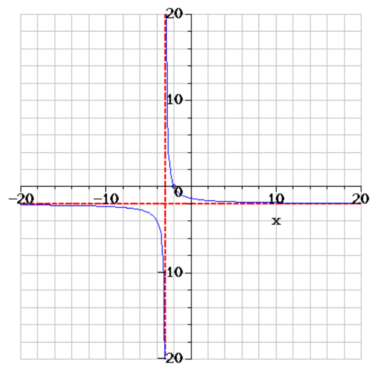
Bij de volgende opgaven en bij de oefeningen in Grasple m.b.t. dit onderdeel, kan je zelf bepalen of je methode 1, 2 of 3 toepast.

a) Bepaal de horizontale en verticale asymptoot uit grafiek A.
b) Bepaal de horizontale en verticale asymptoot uit grafiek B.
c) Bepaal de vergelijking van de lineaire gebroken functies van grafiek A.
d) Bepaal de vergelijking van de lineaire gebroken functies van grafiek B.

A



B



C2.3.2. Bepalen van asymptoten als de vergelijking van een gebroken lineaire functie is gegeven

We hebben nu behandeld hoe je de horizontale en verticale asymptoot kan afleiden uit een gegeven grafiek, zodat je de bijbehorende functie bij een gegeven grafiek kan bepalen.

We zullen nu methoden presenteren om de horizontale en verticale asymptoot te bepalen als de gebroken lineaire functie van een grafiek is gegeven.

<u>Horizontale asymptoot</u>
<u>Methode 1:</u> Het bepalen van de horizontale asymptoot door teller en noemer door x te delen.

Bij methode 1 voor het bepalen van de functie van een gebroken lineaire functie en specifiek de horizontale asymptoot, is al toegelicht dat door de teller en noemer door x te delen je onderstaande algemene formule krijgt.

$$y = \frac{(\mathrm{a}x+\mathrm{b})/\mathrm{x}}{(\mathrm{c}x+\mathrm{d})/\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{a} + \frac{b}{x}}{\mathrm{c} + \frac{d}{x}}$$

Vervolgens moest je voorstellen dat het getal x zich langs de positieve x-as beweegt en wel steeds verder weg van de oorsprong, tot zeer hoge waarden. Het gevolg was dat de termen $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}}$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{x}}$, zodanig klein werden, waardoor de teller van y steeds dichter tot de waarde a zou naderen en de noemer van y steeds dichter tot de waarde c zou naderen. Dus de functie y nadert steeds dichter tot de waarde $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$. De horizontale lijn (horizontale asymptoot) y = $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$ is dus de lijn waartoe de functie y steeds dichter nadert als x zich steeds verder van de oorsprong verwijdert, echter zonder dat de functie ooit deze lijn zal raken.

Bovenstaande toelichting, kunnen we goed gebruiken als een functie van een gebroken lineaire functie is gegeven en gevraagd wordt de horizontale asymptoot te bepalen.

Voorbeeld 1
Voor $\mathrm{y} = \frac{6\mathrm{x}+10}{3\mathrm{x}+4}$, geldt dat we deze kunnen omschrijven naar $\mathrm{y} = \frac{(6\mathrm{x}+10)/\mathrm{x}}{(3\mathrm{x}+4)/\mathrm{x}} = \frac{6+\frac{10}{\mathrm{x}}}{3+\frac{4}{\mathrm{x}}}$. Indien x weer heel groot (of heel klein wordt), worden in de functie y de term $\frac{10}{\mathrm{x}}$ in de teller en

de term $\frac{4}{x}$ in de noemer steeds kleiner en kleiner. Ze krimpen in tot nul, en de teller van y zal steeds dichter tot de waarde 6 naderen en de noemer van y zal steeds dichter tot de waarde 3 naderen. Dus de functie y nadert steeds dichter tot de waarde 6/3 = 2. De horizontale lijn y = 2 is dus de lijn waartoe de functie y steeds dichter nadert als x zich steeds verder van de oorsprong verwijdert, echter zonder dat de functie ooit deze lijn zal raken. Men zegt dan: de horizontale asymptoot is de lijn y = 2.

Sneller kan je zeggen: Als je algemeen weet dat je de horizontale asymptoot bepaald door $y = \frac{a}{c}$, geldt: $y = \frac{6}{3} = 2$.

Voorbeeld 2
Voor $y = \frac{9x+10}{3x+3}$, geldt $y = \frac{a}{c}$, oftewel: y = 9/3 = 3.

<u>Methode 2:</u> Het bepalen van de horizontale asymptoot door middel van een staartdeling.

Voorbeeld 1
We nemen weer hetzelfde voorbeeld als voorbeeld 1 van methode 1, $y = \frac{6x+10}{3x+4}$. We voeren nu een staartdeling uit.

3x + 4/6x + 10\

We delen eerst 6x + 10 door 3x + 4, we zien dat tweemaal 3x + 4 oplevert 6x + 8.

3x + 4/6x + 10\2
<u>6x + 8</u>
2

De rest is dus 2, deze moet nog door 3x + 4 gedeeld worden. Dit geeft dus:

$$y = \frac{6x+10}{3x+4} = 2 + \frac{2}{3x+4}$$

Aan bovenstaande formule is weer te zien dat de horizontale asymptoot gelijk is aan y = 2, want de functie zal met steeds groter wordende x een steeds kleinere term $\frac{2}{3x+4}$ hebben en dus steeds meer op y = 2 gaan lijken.

Verticale asymptoot

Methode 1: Het bepalen van de verticale asymptoot door de noemer gelijk te stellen aan 0.

Bij methode 1 voor het bepalen van de functie van een gebroken lineaire functie en specifiek de verticale asymptoot, is al toegelicht dat het feit een bepaalde waarde van x, niet wordt "geraakt", komt doordat we te maken hebben met een breuk ($y = \frac{ax+b}{cx+d}$). Het kenmerk van een breuk is, dat de noemer geen 0 kan zijn. Daarom geldt algemeen: Een *verticale asymptoot* (v.a.) is een verticale lijn bij die x-waarde waarvoor de noemer nul wordt en waarvoor de teller ongelijk aan nul is, oftewel: $cx + d = 0$.

Bovenstaande toelichting, kunnen we goed gebruiken als een functie van een gebroken lineaire functie is gegeven en gevraagd wordt de verticale asymptoot te bepalen.

Voorbeeld 1

Voor $y = \frac{6x+10}{3x+4}$, geldt dat we $3x + 4$, niet gelijk kan zijn aan 0, aangezien we niet door 0 kunnen delen. Tegelijkertijd, bepaald de waarde van x, waarvoor geldt dat $3x + 4 = 0$, de verticale asymptoot. Dus: $3x + 4 = 0$, oftewel: $3x = -4$, oftewel: $x = -\frac{4}{3}$.

Voorbeeld 2

Voor $y = \frac{9x+10}{3x+3}$, geldt: $3x + 3 = 0$, oftewel: $3x = -3$, oftewel: $x = -1$.

Opgave C2.3.2.

a) Bepaal van de functie $y = \frac{22x + 33}{11x + 200}$, de horizontale asymptoot door teller en noemer door x te delen.

b) Bepaal van de functie $y = \frac{22x + 33}{11x + 200}$, de verticale asymptoot door middel van een staartdeling.

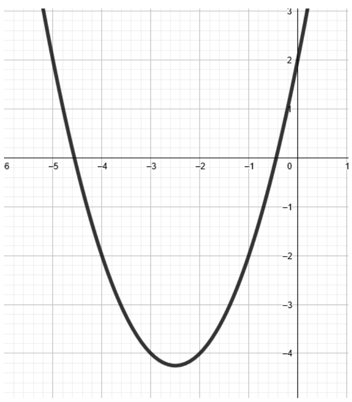
Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

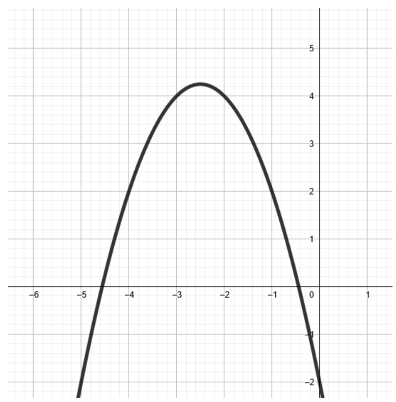
C2.4. De grafiek en de vergelijking van een kwadratische functie

De grafiek van een kwadratische functie ziet eruit als een parabool. In het algemeen luidt de vergelijking van een kwadratische functie als volgt: **$y = ax^2 + bx + c$.**

Dat verklaart ook meteen de naam kwadratische of tweedegraadsfunctie: de hoogste macht van een vergelijking wordt de *graad* van de vergelijking genoemd en de hoogste macht in bovenstaande vergelijking is 2 , vandaar de benaming *tweedegraads functie.*

Een parabool kan een dalparabool zijn, zoals in de afbeelding links hieronder, of een bergparabool, zoals in de afbeelding rechts hieronder.



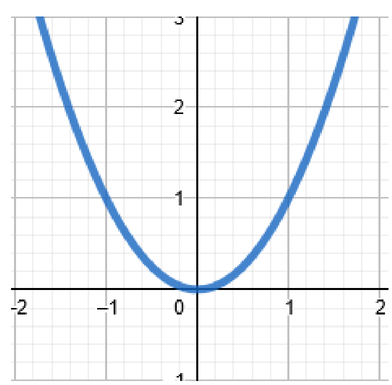


In dit onderdeel van module C2 wordt uitgelegd hoe je de vergelijking kunt opstellen aan de hand van gegevens van een bepaalde kwadratische (= tweedegraads) functie. Omdat het een kwadratische functie betreft, is de grafiek van deze functie een **parabool**. De wijze van aanpak kan verschillen, afhankelijk van de gegevens die bekend zijn:

1) *Coördinaten van de **top** en de **coördinaten** van een **ander punt** zijn gegeven.*

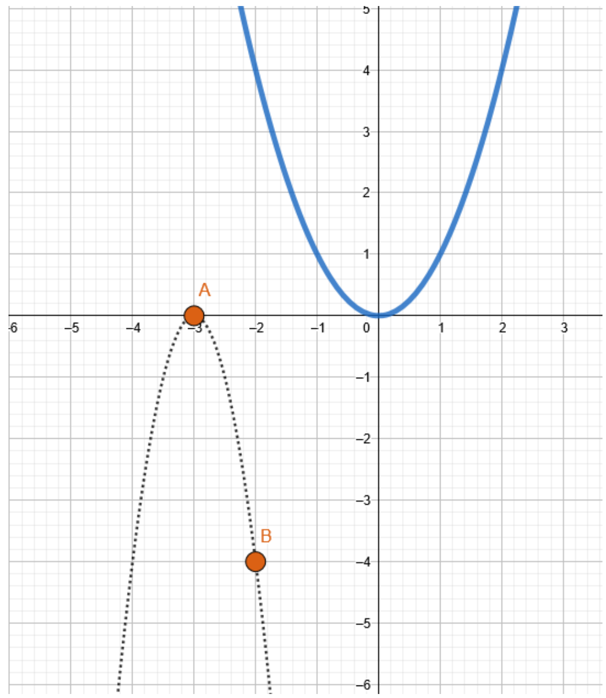
<u>*Methode 1*</u>**:** De bepaling van de functie f(x) door te bepalen welke manipulaties er hebben opgetreden t.o.v. de basisfunctie van een kwadratische functie.

We nemen als uitgangspunt de basisfunctie van een kwadratische functie: $f(x) = x^2$. In de afbeelding rechts is de grafiek van deze basisfunctie afgebeeld. Bij de basisfunctie valt op dat de grafiek een top heeft in punt (0,0) en dat het een dalparabool is.



Gevraagd wordt om de vergelijking op te stellen van de kwadratische functie waarvan de grafiek een top heeft in punt (-3,0) en die tevens door het punt (-2,-4) gaat.

De gegeven punten zijn in de grafiek hiernaast uitgetekend. Doordat we weten dat het een parabool betreft, weten we als gevolg van de 2 punten hoe de grafiek eruit zal zien. Het uittekenen van de punten zal je helpen, de opgave op te lossen.



Allereerst valt op dat de top van de parabool van g(x) t.o.v. f(x), 3 plaatsen naar links is verschoven. Dit kan je ook direct uit de coördinaten van de top afleiden. Van top (0,0) van f(x), naar top (-3,0) van g(x), is 3 plaatsen naar links. De verschuiving omhoog/omlaag is 0.

Net als bij een gebroken lineaire functie is lastig direct uit de grafiek af te leiden hoeveel de grafiek van g(x) is uitgerekt t.o.v. de grafiek van f(x). Daarom noemen we de uitrekking weer even "a".

Nu kunnen we de getrokken conclusies m.b.t. manipulaties, zoals toegelicht in C2.1.2. toepassen:

Een grafiek k eenheden uitrekken t.o.v. de x-as → vervang dan y door k*f(x).

Voor een uitrekking van a geldt daarom dat $y = x^2$, wordt aangepast naar: $y = ax^2$

Een grafiek k eenheden naar links verplaatsen → vervang dan x door (x + k).

Voor de verschuiving van 3 naar links geldt dat $y = ax^2$, wordt aangepast naar:
$y = a(x+3)^2$.

Door nu de coördinaten van x en y van het gegeven punt waar de grafiek doorheen gaat in te vullen in de gekregen functie, kan je a bepalen. Gegeven was punt (-2,-4).

- $-4 = a(-2+3)^2$.
- $-4 = a(1)^2$

- $-4 = a$

- Let op: Als a een negatieve waarde heeft, geeft dit aan dat de grafiek is gespiegeld. In dit voorbeeld is er dus inderdaad sprake van spiegeling. Dat blijkt ook uit de afbeelding.

We vullen vervolgens a in, in de gekregen formule:
- $y = -4(x+3)^2$.

Als we dit verder uitwerken, geldt:
$y = -4(x+3)^2 = -4(x^2 + 3x + 3x + 9) = -4x^2 - 12x - 12x - 36 = -4x^2 - 24x - 36$
(zie module B voor een toelichting op het uitwerken van haakjes).

Bovenstaande kan je uitschrijven in de volgende formule:

$$\boxed{\mathbf{y = A(x - x_T)^2 + y_T}}$$

Hierbij is xT, de waarde van x bij de top, welke de verschuiving naar links/rechts aangeeft. De waarde van y bij de top, wordt weergegeven door yT, en geeft aan in hoeverre de grafiek naar boven/beneden is verschoven. Het getal A bepaald in hoeverre de parabool is uitgerekt ten opzichte van de x-as. Is de verschuiving in tegenovergestelde richting van de basisfunctie f(x), dan is het getal A, negatief.
In dit geval geldt dat: A = -4, xT = -3 en yT = 0. Dus: $y = -4(x - -3)^2 + 0 = -4(x+3)^2$.

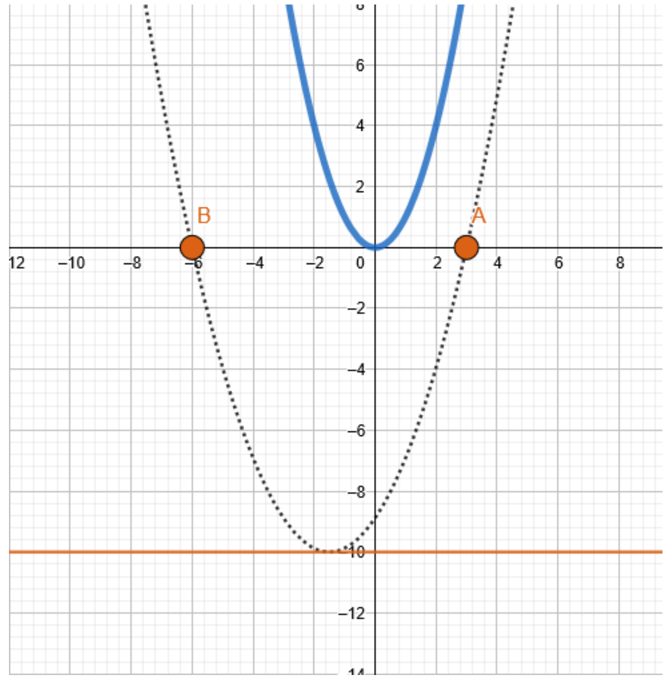
2) *Van de parabool worden de* ***snijpunten met de x-as en de y-coördinaat van de top*** *gegeven .*

Methode 2: De bepaling van de functie g(x) door te bepalen welke manipulaties er hebben opgetreden t.o.v. de basisfunctie van een kwadratische functie.

We nemen als uitgangspunt weer de basisfunctie van een
kwadratische functie: $f(x) = x^2$ (zie de blauwe grafiek in onderstaande afbeelding).

Gevraagd wordt om de vergelijking op te stellen van de kwadratische functie waarvan de parabool de x-as snijdt in x = 3 en x = -6 en dat de top op de lijn y = - 10 ligt.

De gegeven punten zijn in de grafiek hiernaast uitgetekend. Doordat we weten dat het een parabool betreft, weten we als gevolg van de 2 snijpunten en de top op lijn y, hoe de grafiek eruit zal zien. Het uittekenen van de punten zal je helpen, de opgave op te lossen.



De top van de parabool ligt qua x-waarde precies in het midden tussen x_1 en x_2 , dus $x_T = (x_1 + x_2)/2$. In ons geval wordt dat: $x_T = (-6 + 3)/2 = -1.5$. En de y-coördinaat van de top is natuurlijk -10, want de top ligt, zoals gegeven, op de horizontale lijn y = - 10. Dus de top T wordt gegeven door: T (-1.5 , - 10).

Uit de coördinaten van de top van f(x) en g(x), kan bepaald worden hoeveel de grafiek van g(x) t.o.v. f(x) is verschoven. De verschuiving is van top (0,0) van f(x), naar top (-1.5 , -10). Oftewel: De top van de parabool van g(x) is t.o.v. f(x), 1,5 plaats naar links verschoven en 10 plaatsen omlaag verschoven.

Weer geldt dat lastig is af te leiden hoeveel de grafiek van g(x) is uitgerekt t.o.v. de grafiek van f(x). Daarom noemen we de uitrekking weer even "a".

Nu kunnen we de getrokken conclusies m.b.t. manipulaties, zoals toegelicht in C2.1.2. toepassen:

Een grafiek k eenheden uitrekken t.o.v. de x-as → vervang dan y door k*f(x).

Voor een uitrekking van a geldt daarom dat $y = x^2$, wordt aangepast naar: $y = ax^2$

Een grafiek k eenheden naar links verplaatsen → vervang dan x door (x + k).

Voor de verschuiving van 1,5 naar links geldt dat $y = ax^2$, wordt aangepast naar: $y = a(x + 1,5)^2$.

Een grafiek k eenheden naar beneden verplaatsen → vervang dan y door f(x) - k.

Voor de verschuiving van 10 naar beneden geldt dat $y = a(x + 1,5)^2$, wordt aangepast naar: $y = (a(x + 1,5)^2) - 10$.

Door nu de coördinaten van x en y van één van de gegeven snijpunten van de x-as in te vullen in de gekregen functie, kan je a bepalen. Gegeven was o.a. punt (3,0).

- 0 = $(a(3+1{,}5)^2)-10$
- 10 = $(a(4{,}5)^2)$
- 10 = $(a(20{,}25))$
- a = $\frac{10}{20{,}25}$
- Maak hier een breuk van met gehele getallen: $\frac{40}{81}$

- Hier geldt dat a positief is en de grafiek van g(x) t.o.v. f(x) niet is gespiegeld. Dat klopt ook.

We vullen vervolgens a in, in de gekregen formule:

- y = $\frac{40}{81}(x+1{,}5)^2)-10$

Als we dit verder uitwerken, geldt:

y = ($\frac{40}{81}(x+1{,}5)^2)-10$ = $\frac{40}{81}$ (x^2 + 1,5x + 1,5x + 2,25) - 10 = $\frac{40}{81}$ (x^2 + 3x - 2,25) – 10 =

($\frac{40}{81}x^2+\frac{120}{81}x+\frac{90}{81}$) - $\frac{810}{81}$ = $\frac{40}{81}x^2+\frac{120}{81}x-\frac{720}{81}$.

(zie module B voor een toelichting op het uitwerken van haakjes).

Bovenstaande kan je ook weer uitschrijven in de volgende formule:

$$\boxed{\mathbf{y = A\,(x - x_T)^2 + y_T}}$$

In dit geval geldt dat: A = $\frac{40}{81}$, xT = -1,5 en yT = -10. Dus: y = $\frac{40}{81}$ (x + 1,5)² - 10.

Methode 3: De bepaling van de functie g(x) door deze af te leiden uit de vergelijking van de parabool met snijpunten x1 en x2 met de x-as.

De vergelijking van de parabool met snijpunten x_1 en x_2 met de x-as kan als volgt geschreven worden:

$$\boxed{\mathbf{y = A\,(x - x_1)\,(x - x_2)}}$$

Deze formule toont duidelijk aan dat y gelijk wordt aan nul als x = x_1 of x = x_2. Het is alleen mogelijk om de vergelijking van de parabool in de vorm van deze formule te

schrijven indien de parabool de x-as raakt (dan is $x_1 = x_2$) of de x-as in twee verschillende punten snijdt. De constante A geeft ook hier weer, wat de uitrekking is van de functie ten opzichte van de x-as.
Als we de snijpunten met de x-as invullen in bovenstaande vergelijking krijgen we: $y = A (x - (-6)) (x – 3)$ oftewel $y = A (x + 6) (x – 3)$.

Met behulp van de coördinaten van de top (-1.5 , - 10), die we hierboven hebben bepaald, kunnen we nu A bepalen. We substitueren de coördinaten van de top in $y = A(x+6)(x-3)$ en krijgen: $-10 = A (-1.5 + 6)(-1.5 - 3) = A(4.5)(-4.5) = A(\frac{9}{2})(-\frac{9}{2}) = -\frac{81}{4}A$
→ $A = \frac{-10}{-\frac{81}{4}} = \frac{40}{81}$. Dit is gelijk aan de A, die we hierboven al hadden gevonden.

De vergelijking wordt nu: $y = \frac{40}{81}(x+6)(x-3) = \frac{40}{81}(x^2 - 3x + 6x - 18) = \frac{40}{81}(x^2 + 3x - 18) = \frac{40}{81}x^2 + \frac{120}{81} - \frac{720}{81}$.

Opgave C2.4.

a) Stel de algebraïsche vergelijking op van de kwadratische functie waarvan de grafiek een top heeft in (4,8) en die tevens door het punt (2,0) gaat.
b) Bepaal de vergelijking van de parabool indien de parabool de x-as snijdt in $x = - 4$ en $x = 4$ en waarvan de top ligt op de lijn $y = 80$.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

C2.5. De grafiek en de vergelijking van een wortelfunctie

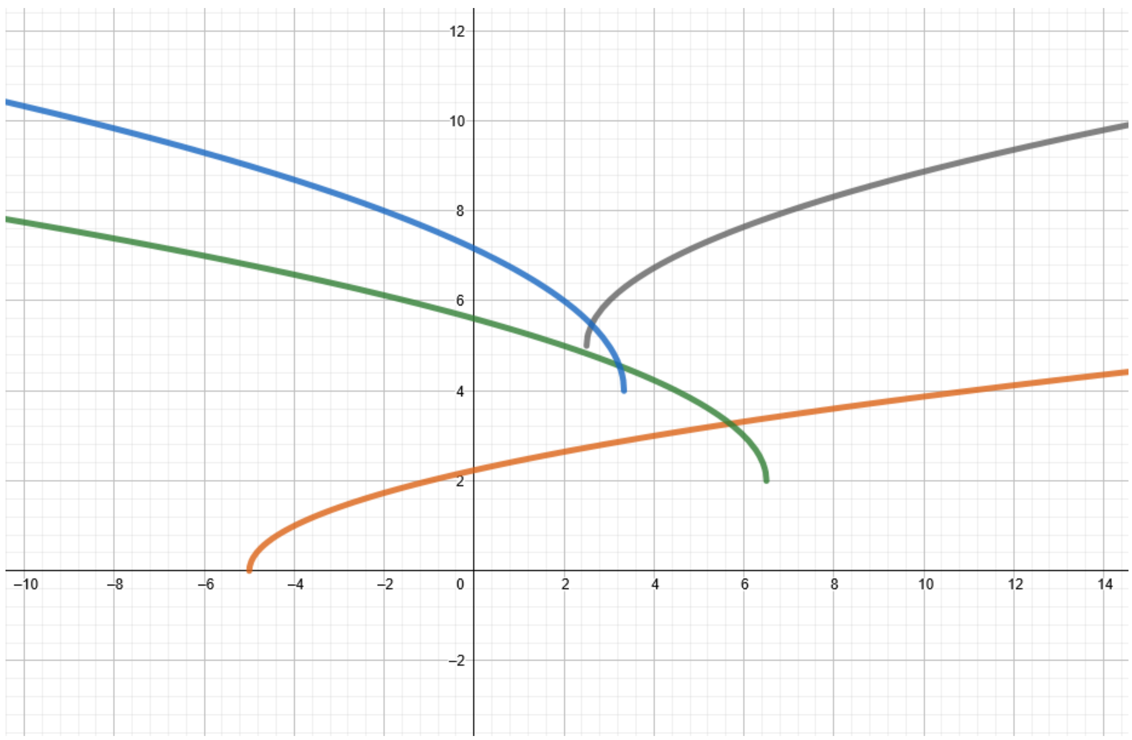
Hieronder staan enkele voorbeelden van wortelfuncties. In deze wortelfuncties zie je een *wortel* optreden. De bijbehorende grafieken zijn afgebeeld in onderstaand figuur.

Functie 1: $y = 5 + \sqrt{2x - 5}$ (grijze grafiek)

Functie 2: $y = \sqrt{x + 5}$ (oranje grafiek)

Functie 3: $y = 2 + \sqrt{-2x + 13}$ (groene grafiek)

Functie 4: $y = 4 + \sqrt{-3x + 10}$ (blauwe grafiek)

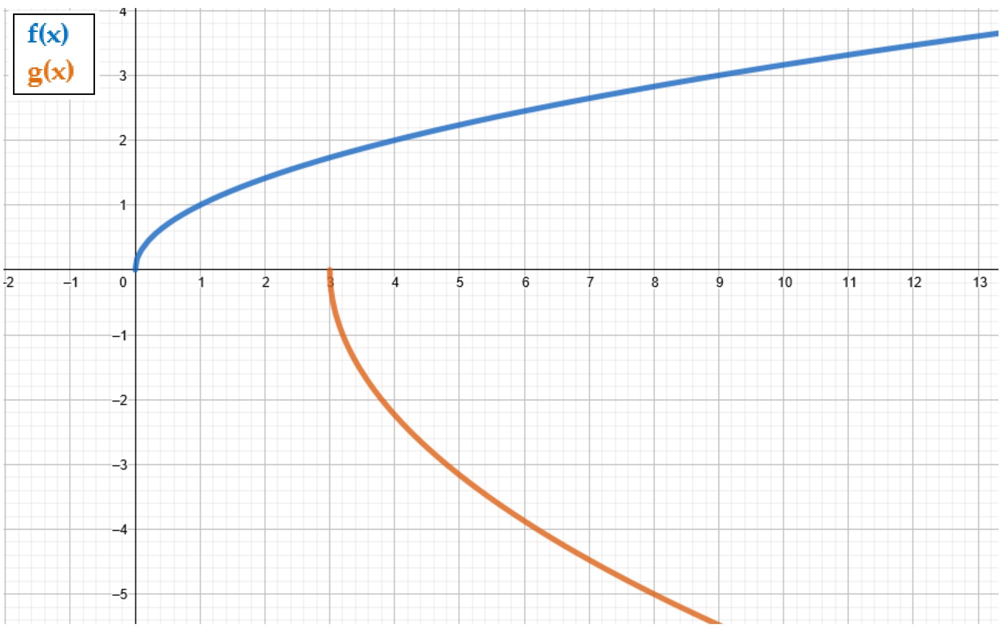


In dit onderdeel van module C2 wordt uitgelegd hoe je de vergelijking kunt opstellen aan de hand van de grafiek van een wortelfunctie.

Voorbeeld 1:
Methode 1: De bepaling van de functie f(x) door te bepalen welke manipulaties er hebben opgetreden t.o.v. de basisfunctie van een kwadratische functie.

We nemen als uitgangspunt de basisfunctie van een wortelfunctie: $f(x) = \sqrt{x}$. In de afbeelding hieronder is de grafiek van deze basisfunctie afgebeeld.

Gevraagd wordt om de vergelijking op te stellen van de wortelfunctie g(x), waarvan de grafiek hieronder in het oranje is weergegeven.



Allereerst valt op dat het beginpunt van de wortelfunctie van g(x) t.o.v. f(x), 3 plaatsen naar rechts is verschoven.

We gaan nu bepalen hoeveel de grafiek van g(x) smaller/breder is t.o.v. de y as als je het vergelijkt met de grafiek van f(x). We starten bij het beginpunt van g(x), punt (3,0) en kiezen daarnaast een makkelijk aan te wijzen punt. Bijvoorbeeld (8,-5). Met behulp van de 2 gegeven punten, kunnen we een verschuiving bepalen. Voor een verschuiving van 5 naar beneden (van 0 naar -5) geldt dat er een verschuiving is van 5 naar rechts (van 3, naar 8). Bij de grafiek van de basisfunctie f(x), is voor een verschuiving van 5 omhoog, de verschuiving naar rechts 25. Voor $f(x) = \sqrt{x}$, geldt namelijk dat als f(x) = 5, dat x gelijk is aan 25, aangezien $\sqrt{25} = 5$. De grafiek van g(x) heeft dus een verschuiving van 5 naar rechts daar waar de verschuiving van f(x) 25 omhoog is. De verbreding van de grafiek is dus $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$. Oftewel een versmalling van 5 t.o.v. de y-as.

Bij bepaling van de uitrekking valt op dat daar waar f(x) stijgt, g(x) daalt. Dit komt doordat de grafiek van g(x) is gespiegeld over de x-as t.o.v. f(x). Dit is in bovenstaande afbeelding ook duidelijk te zien.

Nu kunnen we de getrokken conclusies m.b.t. manipulaties, zoals toegelicht in C2.1.2. toepassen:

Een grafiek k eenheden smaller maken t.o.v. de y-as → vervang dan x door $(\boldsymbol{k} * \mathbf{x})$.

Voor een versmalling van 5 geldt daarom dat y = $\sqrt{x}$, wordt aangepast naar:
y = $\sqrt{5x}$.

Een grafiek k eenheden naar rechts verplaatsen → vervang dan x door (x - k).

Voor de verschuiving van 3 naar rechts geldt dat y = $\sqrt{5x}$., wordt aangepast naar:
y = $\sqrt{5(x-3)}$ = $\sqrt{5x-15}$.

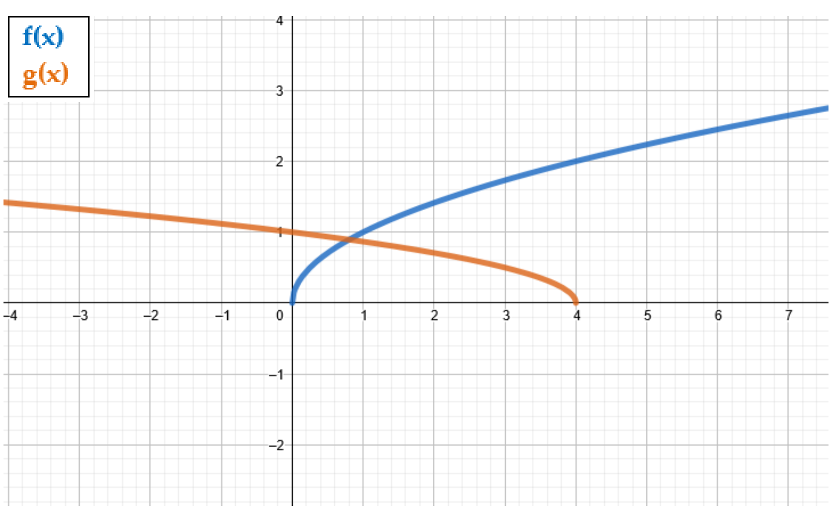
Spiegelen t.o.v. de x-as betekent de functie qua teken laten omdraaien

Voor de spiegeling met de x-as geldt daarom dat y = $\sqrt{5x-15}$, wordt aangepast naar:
y = $-\sqrt{5x-15}$.

Voorbeeld 2:

<u>*Methode 1*</u>**:** De bepaling van de functie f(x) door te bepalen welke manipulaties er hebben opgetreden t.o.v. de basisfunctie van een kwadratische functie.

We nemen als uitgangspunt weer de basisfunctie van een wortelfunctie: f(x) = $\sqrt{x}$ (blauwe grafiek). Gevraagd wordt om de vergelijking op te stellen van de wortelfunctie g(x), waarvan de grafiek hieronder in het oranje is weergegeven.



Allereerst valt op dat de grafiek van g(x) is gespiegeld is over de y-as t.o.v. de grafiek van f(x). Dit is in bovenstaande afbeelding ook duidelijk te zien.

Vervolgens valt op dat het beginpunt van de wortelfunctie van g(x) t.o.v. f(x), 4 plaatsen naar rechts is verschoven.

We gaan nu bepalen hoeveel de grafiek van g(x) is uitgerekt t.o.v. de x as als je het vergelijkt met de grafiek van f(x). We starten bij het beginpunt van g(x), punt (4,0) en kiezen daarnaast een makkelijk aan te wijzen punt. Bijvoorbeeld (0,1). Met behulp van de 2 gegeven punten, kunnen we een verschuiving bepalen. Voor een verschuiving van 4 naar links (van 4 naar 0) geldt dat er een verschuiving is van 1 naar boven (van 0, naar 1). Bij de grafiek van de basisfunctie f(x), is voor een verschuiving van 4 naar rechts, de verschuiving omhoog 2. Voor f(x) = √x, geldt namelijk dat als x = 4, dat f(x) gelijk is aan 2. De grafiek van g(x) heeft dus een verschuiving van 1 omhoog daar waar de verschuiving van f(x) 2 omhoog is. De uitrekking van de grafiek is dus $\frac{1}{2}$. Oftewel een samendrukking van 2 t.o.v. de x-as.

Nu kunnen we de getrokken conclusies m.b.t. manipulaties, zoals toegelicht in C2.1.2. toepassen:

Spiegelen t.o.v. de y-as betekent in het functievoorschrift x door – x vervangen.

Voor de spiegeling met de x-as geldt dat y = $\sqrt{x}$, wordt aangepast naar:
y = $\sqrt{-x}$.

Een grafiek k eenheden samendrukken t.o.v. de x-as → vervang dan y door $\frac{1}{k} * f(x)$.

Voor een versmalling van 2 geldt daarom dat y = $\sqrt{-x}$, wordt aangepast naar:
y = $\frac{1}{2}\sqrt{-x}$.

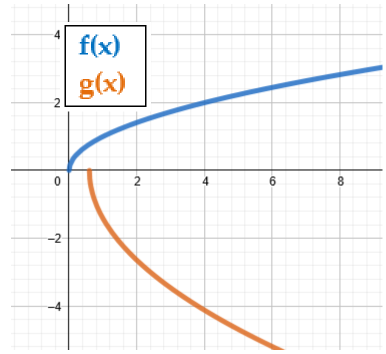
Een grafiek k eenheden naar rechts verplaatsen → vervang dan x door (x - k).

Voor de verschuiving van 4 naar rechts geldt dat y = $\frac{1}{2}\sqrt{-x}$., wordt aangepast naar:
y = $\frac{1}{2}\sqrt{-(x-4)}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{-x+4}$.

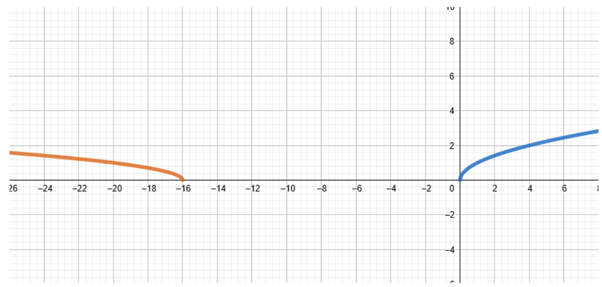
Als je de volgorde van bovengenoemde wijzigingen wijzigt, krijg je als resultaat een andere functie. Om die reden, wordt bij de opgaven aangegeven in welke volgorde de wijzigingen doorgevoerd moeten worden.

Opgave C2.5.

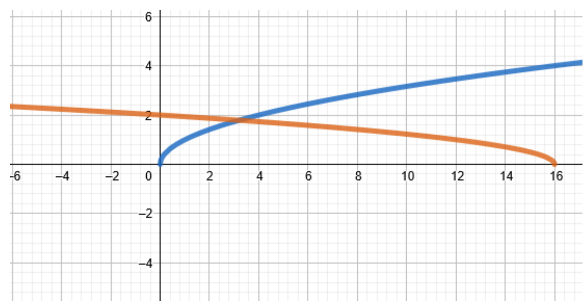
a) Bepaal de functie *g(x)* als de grafiek van *g(x)* ontstaat door die van *f(x)* eerst 3 eenheden naar rechts te verplaatsen, dan t.o.v. de y-as 5x zo smal te maken en tenslotte te spiegelen t.o.v. de x-as.



b) Bepaal de functie *g(x)* als de grafiek van *g(x)* ontstaat door die van *f(x)* eerst te spiegelen t.o.v. de y-as, dan 4 naar links te verplaatsen en maak uiteindelijk de grafiek t.o.v. de y-as vier maal zo breed.



c) Bepaal de functie *g(x)* als de grafiek van *g(x)* ontstaat door die van *f(x)* eerst 4 eenheden naar links te verplaatsen, dan te spiegelingen t.o.v. van de y-as en tot slot de grafiek t.o.v. de y-as vier maal zo breed te maken .



d) Indien je drie verschillende manipulaties mag uitvoeren op een gegeven grafiek, op hoeveel manieren kan je dan door die drie manipulaties in wisselende volgorde uit te voeren tot de nieuwe gemanipuleerde grafiek komen ?

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

C2.6. Ongelijkheden oplossen

In deze paragraaf wordt het oplossen van twee type ongelijkheden uit de doeken gedaan.

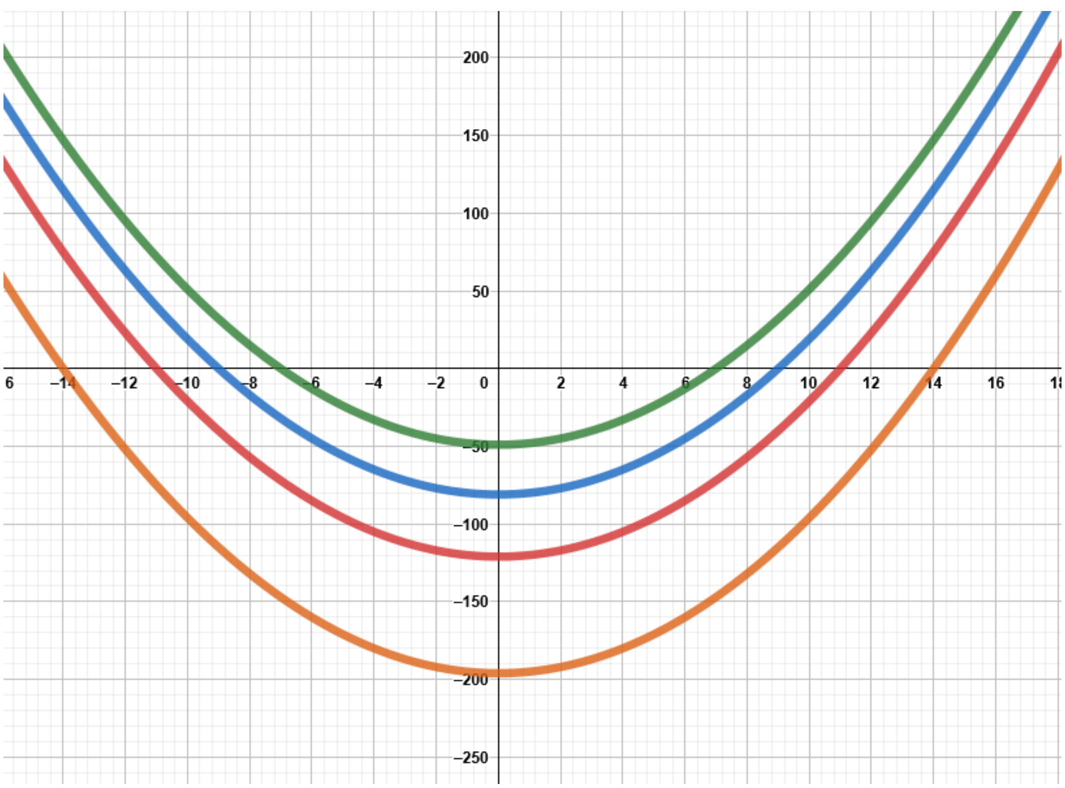
Type 1

Enkele voorbeelden:

a) $x^2 - 49 > 0$
b) $x^2 - 81 < 0$
c) $x^2 - 121 > 0$
d) $x^2 - 196 < 0$

In een grafiek ziet dat er als volgt uit:

a) Groene grafiek.
b) Blauwe grafiek.
c) Rode grafiek.
d) Oranje grafiek.



Uit de grafiek kan je meteen afleiden voor welke waarden van x de grafiek > of < is aan 0. Als de grafiek niet wordt getoond en je wilt dit bepalen uit de functie van de grafiek, doe je dat als volgt:

Bij type 1 is een verschil van twee kwadraten te herkennen:

a) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2$
b) $x^2 - 81 = x^2 - 9^2$
c) $x^2 - 121 = x^2 - 11^2$
d) $x^2 - 196 = x^2 - 14^2$

Je moet nu een vaste methode aanwenden om dit type ongelijkheden aan te pakken. Dit kan op verschillende manieren.

Methode 1:
Herken je een verschil van twee kwadraten, dan moet je onmiddellijk denken aan het volgende merkwaardige product (zie module B voor een toelichting op het ontbinden in factoren):

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{A^2 - B^2 =} \\ \mathbf{(A + B)(A - B)} \end{array}}$$

In dit merkwaardige product stellen A en B elk mogelijk getal voor. Passen we dit merkwaardige product toe op de gegeven voorbeelden , dan gaan de gegeven voorbeelden er als volgt uitzien :

a) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$
b) $x^2 - 81 = x^2 - 9^2 = (x - 9)(x + 9)$
c) $x^2 - 121 = x^2 - 11^2 = (x - 11)(x + 11)$
d) $x^2 - 196 = x^2 - 14^2 = (x - 14)(x + 14)$

Het is belangrijk om je te realiseren wat hier gebeurd is: een *verschil* van twee *kwadraten* is omgezet in een *product* van twee *factoren.*
De eerste ongelijkheid het eerste voorbeeld van type 1 , n.l. $x^2 - 49 > 0$, is nu gemakkelijk op te lossen.

Omdat $x^2 - 49$ te schrijven is als $(x-7)(x+7)$ moeten we, om uit te zoeken wanneer $(x-7)(x+7) > 0$, uitzoeken wanneer de twee afzonderlijke factoren $(x-7)$ en $(x+7)$ kleiner of groter dan nul zijn.

Daartoe maken we een **tekenoverzicht** , zie hieronder :

$(x+7)$	- - -	-7	+ + +	7	+ + +
$(x-7)$	- - -	-7	- - -	7	+ + +
$(x+7)(x-7)$	+ + +	-7	- - -	7	+ + +

In het bovenstaande tekenoverzicht kan je zien dat de factor $(x+7)$ negatief is als $x < -7$, en positief is voor $x > -7$. Ook kan je zien dat de factor $(x-7)$ negatief is voor $x < 7$ en positief wordt indien $x > 7$. Dat is te zien in de eerste twee balkjes in het bovenstaande tekenoverzicht.

Wil je nu weten waar $(x-7)(x+7)$ negatief is of positief, dan moet je als volgt redeneren: eerst verdeel je in gedachten de getallenlijn in drie “gebieden” , n.l. het gebied $x < -7$, het tweede gebied met x liggend tussen -7 en +7 (dus $-7<x<7$) en het derde gebied: $x > 7$.

Vervolgens redeneer je als volgt: als $x < -7$, dan **$(x+7)(x-7) = - * - = +$** . In de derde balk noteer je een plus. Vervolgens als $-7<x<7$, dan **$(x+7)(x-7) = + * - = -$.** Je noteert een min in de derde balk en voor $x > 7$ noteer je, vanwege **$(x-7)(x+7) = + * + = +$** , dat wil zeggen weer een plus.

Zie nogmaals de derde balk in het tekenoverzicht. De vergelijking $x^2 - 49 > 0$ is nu gemakkelijk op te lossen, want uit het tekenoverzicht in de derde balk blijkt dat geldt:
$x^2 - 49 > 0$ indien $x < -7$ of $x > 7$.

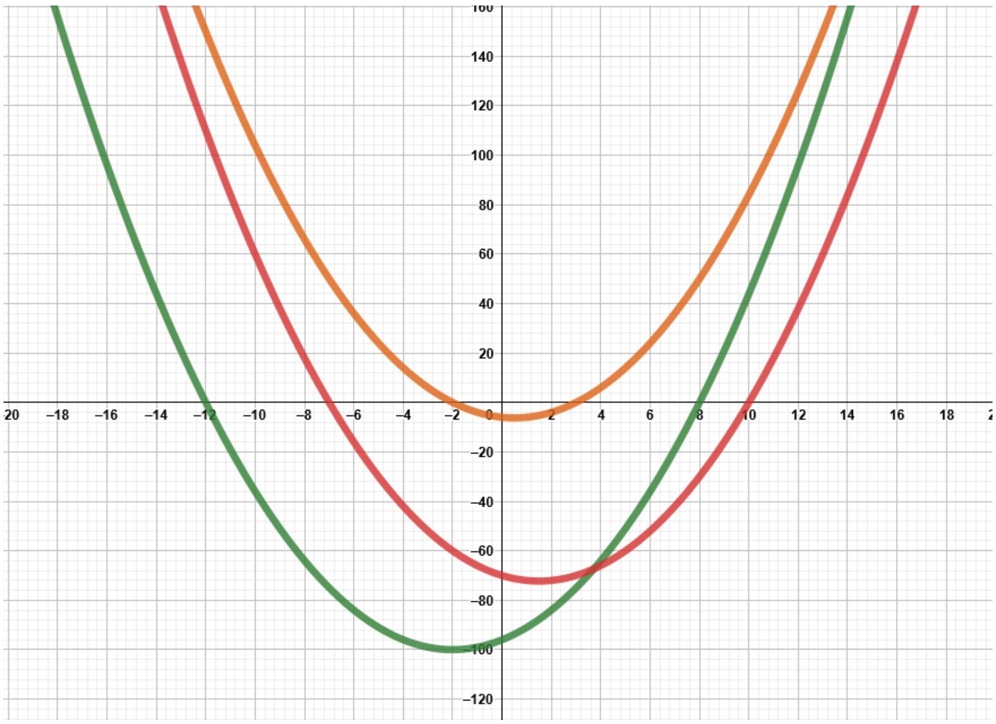
Uit de grafiek blijkt ook dat dit klopt.

Type 2
Enkele voorbeelden:

- **a)** $x^2 + 4x - 96 > 0$
- **b)** $x^2 - 3x - 70 < 0$
- **c)** $x^2 - x - 6 > 0$

In een grafiek ziet dat er als volgt uit:

a) Groene grafiek.
b) Rode grafiek.
c) Oranje grafiek.



Methode 1:

We werken het volgende voorbeeld uit: $\mathbf{x^2 - 3x - 70 < 0}$

In module B is de methode beschreven waarmee we $x^2 - 3x - 70$ kunnen ontbinden. Passen we deze methode toe, dan vinden we:

$\mathbf{x^2 - 3x - 70 = (x - 10)(x + 7) < 0}$

We maken weer op dezelfde wijze een duidelijk tekenoverzicht. Zie hieronder :

$(x - 10)$	- - -	-7	- - -	10	+ + +
$(x + 7)$	- - -	-7	+ + +	10	+ + +
$(x - 10)(x + 7)$	+ + +	-7	- - -	10	+ + +

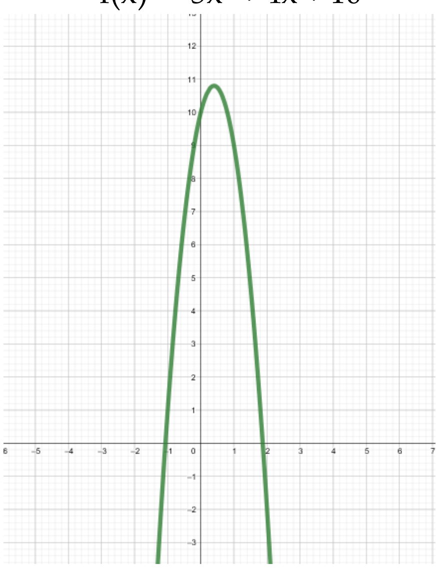
Conclusie :
voor $-7 < x < 10$ is $x^2 - 3x - 70 < 0$ en voor $x < -7$ en $x > 10$ is $x^2 - 3x - 70 > 0$.
Uit de grafiek blijkt ook dat dit klopt.

Methode 2):
We lossen een ongelijkheid op van de vorm $ax^2 + bx + c < 0$ of $ax^2 + bx + c > 0$

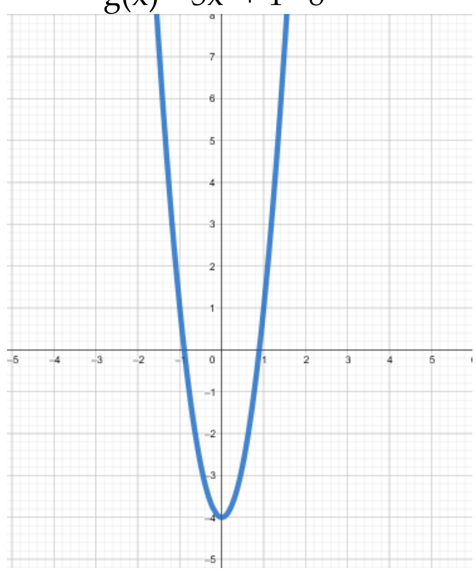
Stap 1) Bepaal of het gaat om een dal- of een bergparabool
Als $a < 0$, dan is het bergparabool
Als $a > 0$, dan is het dalparabool

Zie hieronder een voorbeeld van zowel een berg- als een dalparabool.

$f(x) = -5x^2 + 4x + 10$



$g(x) = 5x^2 + 4 - 8$

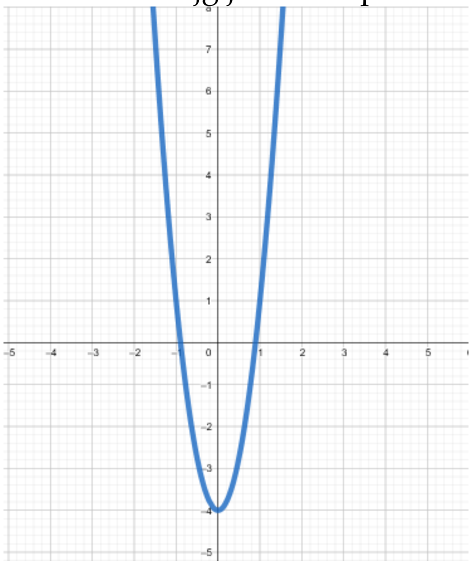


Stap 2) Bepaal de nulpunten(snijpunten met de x-as) zoals hierboven beschreven.
Dit kan dus op de volgende manieren:

- d.m.v. ontbinden in factoren (merkwaardig product of product-som methode)
- d.m.v. het toepassen van de abc-formule.

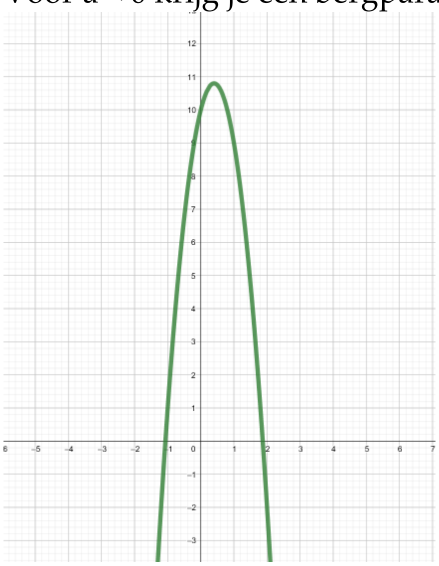
Stap 3)
Maak een schets van de grafiek waarbij je de nulpunten aangeeft en hoe de grafiek loopt (dwerg-of bergparabool). Het gaat dus om het bepalen voor welke x dit geldt:
$ax^2 + bx + c < 0$ of $ax^2 + bx + c > 0$

Voor a > 0 krijg je een dalparabool



+ + + + + + +   - - -   + + + + + + + + +

Voor a < 0 krijg je een bergparabool



- - - - - - - -   + + + + +   - - - - - - - -

Stap 4) Lees nu het gevraagde af van de schets.

De plussen (+) onder de grafiek, geven aan waar de parabool boven de x-as is, dus positief (> 0) en de minnen(-), onder de grafiek, geven aan waar de parabool onder de x-as is, dus negatief is(< 0)

Opgave C2.6.

a) Los op : $x^2 + 4x - 96 < 0$
b) Los op : $x^2 - 9x - 36 > 0$
c) Los op : $x^2 - x - 6 < 0$
d) Los op : $x^2 + x - 6 > 0$
e) Los op : $x^2 - 7x - 8 < 0$

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

ANTWOORDEN van de opgaven

Opgave C2.2.

a) $y = x - 1$

b) $y = 2x$

c) $y = -2x + 3$

d) $y = -3x - 2$

Opgave C2.3.1

a) $y = 3$ en $x = -4$

b) $y = -2$ en $x = -3$

c) $y = (3x - 18)/(x + 4)$

d) $y = (-2x - 4) / (x + 3)$

Opgave C2.3.2

a) $y = (22 + (33/x))/(11x + 200)$. Dus H.A. = $y = 2$

b) $y = 2 - \{ 367 / (11x + 200) \}$, dus de V.A. = $x = -200/11$

Opgave C2.4.

a) $y = -2 (x - 4)^2 + 8 = -2x^2 + 16x - 24$

b) $y = -5 (x + 4) (x - 4) = -5x^2 + 80$

Opgave C2.5.

a) $y = -\sqrt{5x} - 3$

b) $y = \sqrt{-(1/4)x - 4}$

c) $y = \sqrt{-(1/4)x + 4}$

d) 6 manieren

Opgave C2.6.

a) $-12 < x < 8$

b) $x < -3$ of $x > 12$

c) $-2 < x < 3$

d) $x < -3$ of $x > 2$

e) $-1 < x < 8$