Essential Skills Mathematics

Modulewijzer

Module C1

Vergelijkingen

Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben moet je:

- Een onbekende grootheid uit een lineaire vergelijking kunnen oplossen
- Een onbekende grootheid uit een gebroken lineaire vergelijking kunnen oplossen
- Een onbekende grootheid uit een kwadratische vergelijking kunnen oplossen
- Weten hoe je een wortelvergelijking kunt oplossen

Onderwerpen

C1.1. Methoden om lineaire vergelijkingen op te lossen
C1.2. Gebroken lineaire vergelijkingen oplossen
C1.3. Kwadratische vergelijkingen oplossen
C1.4. Wortelvergelijkingen oplossen
Antwoorden van de opgaven

Boek

Je kan gebruikmaken van het volgende boek als aanvullend materiaal:
Basisvaardigheden Wiskunde HTO / 4e druk. ISBN: 978-90-01-57517-5

In de tabel hieronder is aangegeven welke paragrafen in het boek overeenkomen met de verschillende paragrafen van deze studiewijzer.

Paragraaf studiewijzer	**Paragraaf / pagina boek**
C1.1.1. Lineaire vergelijking oplossen type 1	§6.1 / p.52
C1.1.2 Lineaire vergelijking oplossen type 2	§6.1 / p.52
C1.2.1. Gebroken vergelijking oplossen type 1	§4.3 / p.38
C1.2.2 Gebroken vergelijking oplossen type 2	§4.3 / p.38
C1.3.1. Kwadratische vergelijking oplossen type 1	§7.1 / p.62
C1.3.2 Kwadratische vergelijking oplossen type 2	§7.1 / p.62
C1.3.3 Kwadratische vergelijking oplossen type 3	§7.2 / p.64

C1.1. Lineaire vergelijkingen oplossen

Aan de hand van een paar voorbeelden zal uitgelegd worden hoe een onbekende grootheid uit een lineaire vergelijking opgelost kan worden.

C1.1.1. Lineaire vergelijking oplossen type 1

Als eerste voorbeeld het probleem om een onbekende grootheid x op te lossen uit de volgende lineaire vergelijking.

Type 1:
$-4x - 14 = -18$

Dit is een *algebraïsche vergelijking*, d.w.z. een vergelijking waarin *letters, een gelijkteken, een + , een - , enz.* optreden. De bedoeling is nu om die bijzondere waarde voor x te bepalen welke ervoor zorgt dat in bovenstaande vergelijking het linkerlid precies gelijk wordt aan het rechterlid. We kunnen die waarde bepalen via een aantal gebruikelijke stappen.

Stap 1: We streven ernaar om een vergelijking te krijgen van de vorm $x = \ldots\ldots$, dus slechts een enkele x aan de linkerkant en de rest aan de rechterkant. Aan de linkerkant staat echter $- 4x -14$, dus een coëfficiënt - 4 van x (in plaats van gewoon x) en nog een extra term -14. Het ligt voor de hand om eerst de term -14 te verwijderen en dat doen we door links 14 erbij op te tellen. Maar dan moet je, om de gelijkheid tussen de linkerzijde en rechter-zijde van de vergelijking te handhaven, ook rechts 14 erbij optellen. Dus : $-4x - 14 + 14 = -18 + 14$, Ofwel: $-4x = -18 + 14$

Als je nu naar deze vergelijking en de eerste kijkt, dan zie je dat je net zo goed de term -14 , die aan de linkerzijde van de vergelijking staat, naar de rechterzijde van de vergelijking kunt brengen *mits je het teken verandert*! Dat blijkt altijd het geval te zijn. Dus als je een negatieve term naar de andere kant van de vergelijking brengt, dan wordt hij positief en als je een positieve term naar de andere kant van de vergelijking brengt, dan wordt hij negatief.

We gaan verder met oplossen. Links vallen 14 en -14 tegen elkaar weg en rechts tellen we -18 en 14 op, en dat wordt dan -4. De vergelijking wordt: $-4x = -4$

Stap 2: In de vergelijking staan mintekens en dat is altijd wat lastiger dan werken met + tekens. Wat we nu vervolgens doen is de regel toepassen *dat je altijd een gelijkheid links*

en rechts met hetzelfde getal mag vermenigvuldigen. En kijkend naar deze vergelijking lijkt het erg handig om links en rechts met -1 te vermenigvuldigen.
Links krijg je dan -4x maal -1 = 4x omdat min maal min plus oplevert en rechts krijg je -4 maal -1 = 4 , eveneens omdat min maal min plus oplevert. Vergelijking wordt: $4x = 4$

Links staat 4x in plaats van x. Dus viermaal teveel. We moeten daarom links en rechts door hetzelfde geschikte getal delen, en dat is 4. Het resultaat wordt: $\frac{4x}{4} = \frac{4}{4}$
En dan wordt het eindresultaat: $x = 1$

Ter controle kun je $x = 1$ invullen in de oorspronkelijke vergelijking. Je vindt dan $-4 \cdot 1 - 14 = -18$. Dus het klopt.

Opgave C1.1.1.

Los op :

a) $9x + 5 = 4$

b) $2x + 5 = 3$

c) $8x + 18 = 27$

d) $43x - 44 = 456$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw x-waarde in de lineaire vergelijking.

C1.1.2. Lineaire vergelijking oplossen type 2

<u>*Type 2*</u>
$32x + 24 = -5x + 17$

Stap 1: We zien een term met x staan zowel aan de linkerkant als aan de rechterkant van de vergelijking. Ons eerste doel is nu om alleen maar links een term met x erin te hebben. Daartoe moeten we links en rechts $5x$ optellen. We krijgen:
$32x + 5x + 24 = -5x + 5x + 17$

Aan de rechterkant vallen $5x$ en $-5x$ tegen elkaar weg. En links staat in totaal $37x$. Dus we moeten verder met: $37x + 24 = 17$

Let op: je kunt ook meteen de term $-5x$ in het rechterlid van vergelijking "oppakken" en naar het linkerlid verplaatsen, *mits je het teken omdraait.*

Stap 2: We zijn een stukje opgeschoten. Nu pakken we de term 24 in het linkerlid van de vergelijking op en *verplaatsen hem* naar het rechterlid. Dat mag, maar dan moet je wel weer het teken omdraaien. Dus: $37x = 17 + (-24) = 17 – 24 = -7$

We houden over $37x = -7$, dus we moeten door 37 delen . We vinden dan als eindresultaat: $x = -7/37$

Opgave C1.1.2.

Los op :
a) $9x + 2 = 8x – 1$
b) $2x + 1 = 3x – 1$
c) $2 – 5x = -3 – 6x$
d) $2x + 5 = 5x –1$
e) $20x + 5 = -35$
f) $-12x + 20 = 6x – 20$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw x-waarde in de lineaire vergelijking.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

C1.2. Gebroken vergelijkingen oplossen

Er zijn verschillende typen van gebroken lineaire vergelijkingen. We bespreken in deze module twee typen gebroken lineaire vergelijkingen.

C1.2.1. Gebroken vergelijking oplossen type 1

Type 1:

$\frac{5}{6} = \frac{7}{x}$

In de vergelijking staan links en rechts *breuken*. Er zijn meerdere manieren om uit deze vergelijking de waarde van x te bepalen. Laten we beginnen met het toepassen van het *kruisproduct:* indien twee breuken gelijk zijn, dus A/B = C/D, dan geldt: AD = BC. Dat is het kruisproduct. Passen we dit idee toe op ons eerste voorbeeld, dan krijgen we: $5x = 6 \cdot 7$ dus $5x = 42$. We vinden x door beide zijden door 5 te delen en we krijgen als antwoord: $x = 42/5$.

Voorbeeld 1

$\frac{8}{x} = \frac{1}{3}$

Toepassing van het kruisproduct geeft $1 \cdot x = 8 \cdot 3$, dus $x = 24$.

Zou het anders kunnen?
Dat kan zeker. Begin met beide kanten van de vergelijking met x te vermenigvuldigen. Je krijgt dan: $x(8/x) = x(1/3)$ ofwel: $8 = x/3$. Vervolgens beide kanten van de vergelijking met 3 vermenigvuldigen. Dan verkrijg je $24 = 3(x/3) = x$. Dus ook op deze manier vind je $x = 24$.

Voorbeeld 2

$\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$

We passen weer het kruisproduct toe: $3x = 5 \cdot 6$, dus $3x = 30$, dus $x = 10$.

Opgave C1.2.1.

Los op:

a) $x/3 = 90/4$

b) $113/23 = x/3$

c) $78/x = 39/6$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw x-waarde in de vergelijking.

C1.2.2. Gebroken vergelijking oplossen type 2

Type 2:

$$\frac{10+x}{8x+3} = \frac{10}{3}$$

Je kunt ook bij dit type gebroken vergelijking de *kruisproductregel* toepassen:
$(10 + x)\cdot 3 = 10(8x + 3)$

De haakjes zijn hier zeer belangrijk, je moet $10 + x$ *in zijn geheel* vermenigvuldigen met 3 en je moet $8x + 3$ *in zijn geheel* vermenigvuldigen met 10. Vandaar de haakjes om $10 + x$ en $8x + 3$.
We werken nu de haakjes weg volgens de bekende regel voor *distributiviteit*:
$(a + b)c = ac + bc$

Deze regel toepassend op $(10 + x)\cdot 3 = 10(8x + 3)$ levert op: $10\cdot 3 + x\cdot 3 = 10\cdot 8x + 10\cdot 3$, dus
$30 + 3x = 80x + 30$

We brengen nu de term $3x$ naar rechts, de term wordt dan $-3x$ en we brengen de term 30 naar links, die wordt dan -30. Het resultaat wordt: $30 + (-30) = 80x + (-3x)$, dus
$0 = 77x$ ofwel $77x = 0$. Dus $x = 0$ is de oplossing.

Voorbeeld 1

$$\frac{x+2}{x+5} = \frac{4}{5}$$

We passen weer het *kruisproduct* toe: $5 \cdot (x + 2) = 4 \cdot (x + 5)$. Haakjes op de bekende manier wegwerken geeft: $5x + 10 = 4x + 20$. De term 4x gaat nu naar links en wordt -4x en de term 10 gaat naar rechts en wordt -10. Dan zijn we weer een stapje verder:
$5x + (-4x) = 20 + (-10)$. Vereenvoudigen geeft: $x = 10$.

Tot slot beschouwen we een gebroken lineaire vergelijking van de volgende vorm:

Voorbeeld 2

$$\frac{x-4}{3x+1} = \frac{5}{x}$$

Pas je in dit geval weer het kruisproduct toe, dan ontstaat de vergelijking
$(x-4)x = (3x+1) \cdot 5$ ofwel, na uitwerking, de vergelijking $x^2 - 19x - 5 = 0$.
Dit is geen lineaire vergelijking meer, maar een *kwadratische vergelijking,* vanwege de macht 2 van *x*, deze zal worden behandeld in de volgende paragraaf C1.3.

Opgave C1.2.2.

Los op :

a) $\frac{2x+4}{3x-30} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{10x-20}{14} = \frac{4x-13}{2}$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw *x*-waarde in de lineaire vergelijking.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

C1.3. Kwadratische vergelijkingen oplossen

In deze paragraaf wordt het oplossen van drie typen kwadratische vergelijkingen behandeld.

C1.3.1. Kwadratische vergelijking oplossen type 1

<u>*Type 1*</u>:

- $x^2 - 64 = 0$; $x^2 - 16 = 0$
- $100x^2 - 9 = 0$

Dit type kwadratische vergelijkingen bestaat altijd uit het *verschil van twee kwadraten.* Het oplossen van dit type vergelijking vereist allereerst dat we de twee kwadraten *herkennen* .

Voorbeeld 1
$x^2 - 64 = 0$
Dit kunnen we schrijven als: $x^2 - 8^2 = 0$, maar ook als: $x^2 - (-8)^2 = 0$ of: $x^2 = (-8)^2$ en $x^2 = 8^2$
In beide gevallen betekent dit dat deze vergelijking als oplossing heeft $x = 8$ of $x = -8$.

Wellicht is het volgende nog duidelijker: herken in dit type vraagstukken het volgende *merkwaardige produkt*: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Hier kunnen a en b alles zijn. In deze vergelijking is $a = x$ en $b = 8$ (of $b = -8$). Het gebruiken van dit merkwaardige product geeft: $x^2 - 64 = 0$ wordt dan $(x - 8)(x + 8) = 0$, We gebruiken dat als een product van twee factoren, hier dus het product van de factoren $(x - 8)$ en $(x + 8)$ nul is dan moet één van de factoren nul zijn. Dus moet $(x - 8)$ nul zijn , ofwel $x = 8$, of de andere factor $(x + 8)$ moet nul zijn, dus $x = -8$. Dit geeft weer de oplossing $x = 8$ of $x = -8$.

Voorbeeld 2
$x^2 - 16 = 0$
Dit schrijven we als $x^2 - 4^2 = 0$, dus $(x - 4)(x + 4) = 0$, dus $x = 4$ of $x = -4$.
Maar ook als: $x^2 - 4^2 = 0$ of: $x^2 = 4^2$ geeft weer $x = 4$ of $x = -4$.

Voorbeeld 3
$100x^2 - 9 = 0$
Dit wordt: $(10x)^2 - 3^2 = 0$, dus $(10x)^2 = 3^2$, geeft als oplossing $10x = 3$ en $10x = -3$,
dus $x = 3/10$ of $x = -3/10$.

Opgave C1.3.1.

Los op:

a) $w^2 - 25 = 0$
b) $u^2 - 144 = 0$
c) $x^2 - 49 = 0$
d) $k^2 - 289 = 0$
e) $64a^2 - 25 = 0$
f) $49x^2 - 49 = 0$
g) $36y^2 - 144 = 0$
h) $225v^2 - 324 = 0$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw waarde in de kwadratische vergelijking.

C1.3.2. Kwadratische vergelijking oplossen type 2

Type 2:

- $x^2 + 12x + 20 = 0$
- $a^2 - 5a - 24 = 0$
- $w^2 + 6w - 16 = 0$
- $u^2 - 5u - 14 = 0$

We hebben hier te maken met een iets ander type kwadratische vergelijking, waarop de nu volgende procedure toegepast kan worden.

Voorbeeld
$x^2 + 12x + 20 = 0$
In deze uitdrukking kan x elk reëel getal zijn. Het linkerlid is een optelling van drie *termen* namelijk x^2, $12x$ en 20. Het zou handig zijn als je van deze som van drie termen een vermenigvuldiging van (twee) factoren zou kunnen maken. Het vinden van de oplossing wordt gepresenteerd in de vorm van vier stappen.

Stap 1: Je moet je aandacht allereerst richten op de derde term, dus op het getal 20. Zie dit getal 20 als een *product* van twee *gehele* getallen. Je hebt dan in totaal 6 mogelijkheden:

20	1
-20	- 1
10	2
- 10	- 2
5	4
-5	- 4

Stap 2: Kijk naar het getal dat in de 2de term voor x staat. Dit getal is 12 en wordt de *coëfficiënt* van x genoemd.

Stap 3: Zoek het getallenpaar met de *som gelijk aan het getal uit stap 2,* dus 12. Dat zijn de getallen 10 en 2.

Stap 4: Dit getallenpaar (10, 2) geeft de oplossing, je kunt de algebraïsche uitdrukking $x^2 + 12x + 20$ schrijven als een *product* van de *factoren* $(x + 2)$ en $(x + 10)$, dus
$x^2 + 12x + 20 = (x + 2)(x + 10)$.

Het voordeel van ontbinden in factoren is, dat je makkelijker kunt zien voor welke waarden van x de uitdrukking $x^2 + 12x + 20$ nul wordt. Namelijk als $(x + 2)$ nul wordt of als $(x + 10)$ nul wordt, dus als $x = -2$ of als $x = -10$.

Opgave C1.3.2.

Los op:

a) $a^2 – 5a – 24 = 0$
b) $w^2 + 6w – 16 = 0$
c) $u^2 – 5u – 14 = 0$
d) $z^2 – 5z + 6 = 0$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw waarden in de kwadratische vergelijking.

C1.3.3. Kwadratische vergelijking oplossen type 3

<u>*Type 3*</u>**:**

- $4x^2 + 9x + 3 = 0$
- $9x^2 + 9x + 1 = 0$
- $-4x^2 + 5x + 6 = 0$

Dit type kwadratische vergelijking is niet met de methoden, gebruikt by *type 1* en *type 2*, op te lossen. Je herkent dit type vergelijking vaak aan de coëfficiënt van x^2, die ongelijk aan 1, maar deze methode is ook te gebruiken als deze coëfficiënt wel gelijk is aan 1.

Willen we dit type kwadratische vergelijking systematisch kunnen oplossen, dan moeten we gebruik maken van de bekende *a,b,c-formule*. Een kwadratische vergelijking kunnen we in zijn algemeenheid noteren als: $ax^2 + bx + c = 0$.

We berekenen eerst de *discriminant*: $D = b^2 - 4ac$, waarin a, b en c de coëfficiënten van de termen in bovenstaande vergelijking zijn.

Er zijn dan drie mogelijkheden :

$b^2 - 4ac < 0$ er zijn **geen** oplossingen
$b^2 - 4ac = 0$ er is **één** oplossing, gegeven door $x = -b/(2a)$
$b^2 - 4ac > 0$ er zijn **twee** oplossingen, gegeven door de a,b,c-formule.

Deze a,b,c-formule geeft de mogelijke oplossingen voor $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Omdat er alleen maar een wortel uit een getal groter of gelijk aan nul getrokken kan worden, moet de *discriminant* dus groter dan 0 zijn.

Voorbeeld 1
$4x^2 + 9x + 3 = 0$
In dit voorbeeld is a = 4, b = 9 en c = 3. De discriminant is dan $9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 33$.
We vullen vervolgens deze waarden in in de a,b,c-formule: $x = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2 \cdot 4} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{8}$
De oplossingen worden dan: $x = \frac{-9 + \sqrt{33}}{8}$ en $x = \frac{-9 - \sqrt{33}}{8}$

Voorbeeld 2

$9x^2 + 9x + 1 = 0$

In dit voorbeeld is a = 9, b = 9 en c = 1. De discriminant is dan $9^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 45$.

We vullen vervolgens deze waarden in in de a,b,c-formule: $x = \frac{-9 \pm \sqrt{45}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm \sqrt{45}}{18}$

Nu is $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ De oplossingen worden dan: $x = \frac{-9+3\sqrt{5}}{18}$ en $x = \frac{-9-3\sqrt{5}}{8}$

Voorbeeld 3

$-4x^2 + 5x + 6 = 0$

In dit voorbeeld is a = -4, b = 5 en c = 6. De discriminant is dan $5^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 6 = 121$.

We vullen vervolgens deze waarden in in de a,b,c-formule: $x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-5 \pm 11}{-8}$

De oplossingen worden dan: $x = \frac{-5+11}{-8} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$ en $x = \frac{-5-11}{-8} = \frac{-16}{-1} = 2$

Opgave C1.3.3.

Los op:

a) $2x^2 + 14x - 13 = 0$
b) $2x^2 + 4x + 5 = 0$
c) $5x^2 - 20x + 20 = 0$
d) $(2x^2 - 3x)/10 = 4x$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw waarden in de kwadratische vergelijking.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

C1.4. Het oplossen van een wortelvergelijking

In deze paragraaf wordt het oplossen van een wortelvergelijking besproken, dus het oplossen van de onbekende x uit een vergelijking waarin wortels optreden. De Duitser Adam Riese (1492 – 1559) wonende te Erfurt in Duitsland was de eerste persoon die het wortelteken gebruikte en wel in 1524 in zijn boek "Rechenung nach der Lenge, auf den Linihen und Feder". Het wortelteken is dus al knap oud!

Worteltrekken is de *omgekeerde bewerking van kwadrateren*: $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$, de omgekeerde bewerking is *de wortel uit 25 trekken* ofwel dat getal zoeken dat met zichzelf vermenigvuldigd 25 oplevert. Van belang is je te realiseren dat alleen maar een wortel getrokken kan worden uit een getal dat groter of gelijk aan nul is.
We beperken ons tot het behandelen van drie typen wortelvergelijkingen.

C1.4.1. Wortelvergelijking oplossen type 1

Type 1:
- $\sqrt{2x} = 0$
- $\sqrt{4x - 4} = 2$
- $\sqrt{x + 5} = 3$

Dit type wortelvergelijking heeft dus de vorm $\sqrt{\mathrm{a}x + \mathrm{b}} = \mathrm{c}$, met a, b en c constanten.

Voorbeeld
$\sqrt{4x - 4} = 2$
De strategie is de wortel te laten verdwijnen en dat wordt bereikt door *links en rechts te kwadrateren.* Dan ontstaat de vergelijking $4x - 4 = 4$ en dit type vergelijking is in paragraaf C1.1 behandeld. We brengen de term 4 naar het rechterlid. Dan ontstaat de vergelijking $4x = 8$. Tot slot delen we het linkerlid en het rechterlid van de vergelijking door 4 en we vinden de oplossing: $x = 2$.

Let op: Het is bij wortelvergelijkingen essentieel om de uitkomst te controleren door de gevonden waarde voor x weer in de oorspronkelijke vergelijking te substitueren. Bij het kwadrateren kan het voorkomen dat je extra oplossingen maakt, zogenaamde *schijnoplossingen*.

Voeren we deze controle uit, dan vinden we $\sqrt{4.2 - 4} = 2$ en dat klopt.

Opgave C1.4.1.

Los op:

a) $\sqrt{5x + 14} = 3$

b) $\sqrt{x} = 79$

c) $7 + \sqrt{2x - 5} = 11$

d) $3\sqrt{2x - 5} = \sqrt{2x - 5} + 6$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw waarden in de wortelvergelijking.

C1.4.2. Wortelvergelijking oplossen type 2

Type 2:

- $x + \sqrt{x} = 12$
- $x - \sqrt{-5x - 5} = -1$
- $4\sqrt{x} - 5x = 23$
- $6x - \sqrt{13x + 20} = 32$

Dit type wortelvergelijking heeft dus de vorm $\mathrm{a}x \pm \sqrt{\mathrm{b}x + \mathrm{c}} = \mathrm{d}$, met a, b, c en d constanten.

Voorbeeld

$x - \sqrt{-5x - 5} = -1$

De strategie is nu om de wortel te *isoleren*, de wortel aan de ene kant en de rest aan de andere kant. Daartoe hoeven we alleen maar de term x naar de andere kant te brengen. Het resultaat is: $-\sqrt{-5x - 5} = -1 - x$. Vervolgens *kwadrateren* om de wortel te verwijderen $(-\sqrt{-5x - 5})^2 = (-1 - x)^2$. Dat geeft: $-5x - 5 = 1 + 2x + x^2$

Alle termen naar het rechterlid van de vergelijking brengen geeft $x^2 + 7x + 6 = 0$. In paragraaf C1.3 *type 2* is uitgelegd dat deze vergelijking te schrijven is als $(x + 6)(x + 1) = 0$ dus de oplossingen *lijken* te zijn $x = -6$ en $x = -1$.

Absolute zekerheid verkrijgen we pas door *controle*: substitueer deze twee oplossingen in de oorspronkelijke wortel vergelijking: $x = -6$ levert op $-6 - \sqrt{-5.(-6) - 5} = -1$, dat klopt niet , dus $x = -6$ is een *foutieve* oplossing. Maar $x = -1$ levert op $-1 - \sqrt{-5.(-1) - 5} = -1$en dat is correct. *De enige en juiste oplossing is dus:* $x = -1$.

De schijnoplossing is door het kwadrateren geïntroduceerd. Je moet hier altijd op attent zijn!

Opgave C1.4.2.

Los op:

a) $x + \sqrt{x} = 12$

b) $4\sqrt{-5x} - 5x = 2$

c) $6x - \sqrt{13x + 20} = 32$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw waarden in de wortelvergelijking.

C1.4.3. Wortelvergelijking oplossen type 3

Type 3:

- $\sqrt{3x-6} + \sqrt{-7x+3} = -5$,
- $\sqrt{-4x+20} - \sqrt{6x-30} = -10$

Dit type wortelvergelijking heeft dus de vorm $\sqrt{\mathrm{a}x+\mathrm{b}} \pm \sqrt{\mathrm{c}x+\mathrm{d}} = \mathrm{e}$, met a, b, c, d en e constanten.

Het is oppassen geblazen met wortelvergelijkingen. Er kan immers alleen maar een wortel getrokken worden uit een getal groter of gelijk aan nul, dus voor de eerste vergelijking geldt dat x groter of gelijk aan 2 is tevens dat x kleiner of gelijk is aan 3/7. Voor de tweede vergelijking geldt dat x kleiner of gelijk aan 5 is en tevens dat x groter of gelijk aan 5 is. Dus x = 5 zou de enig mogelijke oplossing kunnen zijn maar die voldoet niet want dan zou de vergelijking 0 = 10 ontstaan en dat is onmogelijk. Deze vergelijking heeft dus geen oplossingen.

Voorbeeld

$\sqrt{6x-5} = \sqrt{3x-6} + 2$

Er kan alleen een wortel uit een getal groter of gelijk aan nul getrokken worden, dus er moet gelden dat $x \geq 2$ en ook $x \geq 5/6$, ofwel $x \geq 2$ want als x groter of gelijk is aan 2, dan is x ook groter of gelijk aan 5/6.

Er zijn meerdere manieren om de onbekende x te bepalen uit deze wortelvergelijking. Een manier is om beide wortels in het linkerlid van de vergelijking te zetten en de constante rechts. Dan ontstaat de vergelijking $\sqrt{6x-5}-\sqrt{3x-6}=2$.
Kwadrateren en gebruikmaken van het merkwaardige product $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ leidt tot $6x-5-2\sqrt{6x-5}\sqrt{3x-6}+3x-6=4$
De termen zonder wortel naar het rechter lid brengen en toepassen dat $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ geeft $-2\sqrt{(6x-5)(3x-6)}=4-6x+5-3x+6=-9x+15$
Nu nogmaals kwadrateren $4(6x-5)(3x-6) = (-9x+15)^2 = 81x^2 - 270x + 225$ ofwel $3x^2 - 22x + 35 = 0$. Met behulp van de a,b,c-formule zoals geïntroduceerd in paragraaf B.3. bij de behandeling van *type 2*, vinden we twee oplossingen namelijk $x = 5$ en $x = 7/3$.
Rest ons deze twee antwoorden te controleren door substitutie in de oorspronkelijke vergelijking. Substitueren we $x = 5$, dan ontstaat de vergelijking $5 = 3 + 2$, dus dat klopt. De andere waarde $x = 7/3$ geeft $3 = 1 + 2$, dus dat klopt ook. Beide gevonden oplossingen voldoen aan de vergelijking en zijn dus correcte oplossingen. Vergelijk ze ook met de voorwaarde die we berekend hadden, namelijk dat $x \geq 2$.

Opgave C1.4.3.

Los op:

a) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=4$

b) $\sqrt{-3x+2}-\sqrt{-2x}=5$

c) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=1$

Controleer je oplossing door substitutie van jouw waarden in de wortelvergelijking.

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

Antwoorden van de opgaven

Opgave C1.1.1.

a) $x = -1/9$

b) $x = -1$

c) $x = 9/8$

d) $x = 500/43$

Opgave C1.1.2.

a) $x = -3$

b) $x = 2$

c) $x = -5$

d) $x = 2$

e) $x = -2$

f) x = 20/9

Opgave C1.2.1.

a) $x = 135/2$

b) $x = 339/23$

c) $x = 12$

Opgave C1.2.2.

a) $x = -130/11$

b) $x = 71/18$

Opgave C1.3.1.

a) $w = 5$ of $w = -5$

b) $u = 12$ of $u = -12$

c) $x = 7$ of $x = -7$

d) $k = 17$ of $k = -17$

e) $a = 5/8$ of $a = -5/8$

f) $x = 1$ of $x = -1$

g) $y = 2$ of $y = -2$

h) $v = 6/5$ of $v = -6/5$

Opgave C1.3.2.

a) $a = 8$ of $a = -3$

b) $w = 2$ of $w = -8$

c) $u = -2$ of $u = 7$

d) $z = 2$ of $z = 3$

Opgave C1.3.3.

a) $x = \frac{-7+5\sqrt{3}}{2}$ of $x = \frac{-7-5\sqrt{3}}{2}$

b) geen oplossingen

c) $x = 2$

d) $x = 0$ of $x = 43/2$

Opgave C1.4.1.

a) $x = -1$

b) $x = 6241$

c) $x = 21/2$

d) $x = 7$

Opgave C1.4.2.

a) $x = 9$

b) $x = -2 + 4/5\sqrt{6}$

c) $x = \frac{397 \pm \sqrt{13033}}{72}$

Opgave C1.4.3.

a) $x = 83$

b) $x = -123 - 10\sqrt{146}$

c) $x = -2$